Université de Provence
Licence de Mathématiques 2007-2008
M15 (Analyse 2)

TD 3 - SUITES DE FONCTIONS

Exercice 1.

1. Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :
$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}.$$
2. Etudier la convergence uniforme sur $[1, +\infty[$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :
$$f_n(x) = \ln\left(x + \frac{1}{n}\right).$$
3. Etudier en fonction du paramètre réel α la convergence simple et uniforme sur $[0, +\infty[$ de la suite de fonctions $(f_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :
$$f_{\alpha,n}(x) = n^\alpha e^{-nx}.$$

Exercice 2.

On considère les suites de fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$ par :
$$f_n(x) = x^n, \quad g_n(x) = x^n(1-x), \quad h_n(x) = x^n(1-x^n), \quad i_n(x) = x^n(1-x)^n.$$

1. Etudier la convergence simple et uniforme de ces suites de fonctions sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. Que se passe-t-il si l'on remplace l'intervalle fermé $[0, 1]$ par l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$? Et par l'intervalle fermé $[0, a]$ avec $0 < a < 1$?

Exercice 3.

Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions définies sur $I = [0, +\infty[$ par
$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad g_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, \quad h_n(x) = n \sin\frac{x}{n},$$
$$i_n(x) = \frac{\sin nx}{1+n^2x^2}, \quad j_n(x) = (\sin x)\, e^{-nx}, \quad k_n(x) = n^3 x e^{-n^2x^2}.$$
Pour chaque suite, représenter sur un même dessin les graphes des fonctions correspondant aux indices $n = 1, 5, 10$ et des fonctions limites.
Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 4.

Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$f_n(x) = \tfrac{1}{n} \text{ si } |x| \le n \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } n < |x|.$$

Exercice 5.

1. Démontrer que si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ converge uniformément vers une fonction f alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I, la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$r_n := f_n(x_n) - f(x_n)$$
converge vers zéro.
2. Application : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $I = \mathbb{R}$ par :
$$f_n(x) = n^2\left(1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right).$$
   (a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2}{2}$.
   (b) Montrer que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $x_n = 2n\pi$, ne converge pas vers zéro. Conclure.
   (c) Montrer que la convergence est uniforme sur les intervalles bornés.

Exercice 6.

On dira qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ *vérifie la propriété* (P) si pour tout $t \in I$ et toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ convergeant vers t, la suite $(f_n(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1. Montrer que si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété (P), alors pour tout t fixé dans I et toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ convergeant vers t, les suites $(f_n(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. On notera $f(t)$ cette limite.
2. Montrer que si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété (P), alors la suite converge simplement vers f. Que pensez-vous de la réciproque ?
3. Soit $I =]0,1]$; en considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx},$$
montrer que la propriété (P) n'entraîne pas la convergence uniforme. Montrer qu'en revanche, la convergence uniforme entraîne la propriété (P).

Exercice 7.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^2 e^{-nx^2}\,dx$. Calculer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8.

On considère les deux suites de fonctions définies sur $[0,1]$ par
$$f_n(x) = nx^n(1-x), \qquad g_n(x) = n^2x^n(1-x).$$

1. Déterminer les limites simples f et g des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. A-t-on
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx \quad ?$$
3. Etudier la convergence uniforme de ces suites de fonctions.
4. Commentaire de ce résultat.

Exercice 9.

Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0;1]$ par

$$h_n(x)=\left|\begin{array}{ll} n^2x & \text{si } x\in[0;\frac{1}{n}];\\ -n^2x+2n & \text{si } x\in[\frac{1}{n};\frac{2}{n}];\\ 0 & \text{si } x\in[\frac{2}{n};1]. \end{array}\right.$$

1. Déterminer la limite simple de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Calculer $\int_0^1 h_n(x)dx$. La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?

Exercice 10.

1. Trouver une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction
$$va: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & |x|. \end{array}$$
Sans faire de calcul, dire si la suite de fonctions $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction arbitraire. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par
$$f_n(x)=\sqrt{f(x)^2+\frac{1}{n^2}}.$$

Exercice 11.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par
$$f_n(t)=\frac{n+t}{nt+1}.$$

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Trouver le plus grand intervalle sur lequel la convergence est uniforme.
3. Etudier la convergence de la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et commenter le résultat.

Exercice 12.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, une suite de fonctions. Une *sous-suite* de cette suite de fonctions est une suite de la forme $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ où $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite *strictement croissante* d'entiers naturels. Montrer que toute sous-suite d'une suite de fonctions simplement (respectivement uniformément) convergente est simplement (respectivement uniformément) convergente et a la même limite que la suite initiale.

Exercice 13.

Une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite *en escalier* s'il existe $n \geq 1$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tels que $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ et f constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles ; construire une suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$.