Université de Provence 2006-2007

Techniques mathématiques de base
Corrigé de la planche 4

Exercice 1: Il s'agit de trouver toutes les fonctions $x(t)$ telles que $x'(t) = 3x(t)$. D'après le cours la réponse est

$$x(t) = Ce^{3t}$$

avec C constante réelle.

Supposons maintenant que $x(0) = 3$; on a donc $Ce^0 = 3$ c'est à dire $C = 3$ et par conséquent $\boxed{x(t) = 3e^{3t}}$ est la solution qui vérifie $x(0) = 3$.

Exercice 2: Il s'agit de trouver toutes les fonctions $f(x)$ telles que $f(x) = -5'f(x)$ c'est à dire $f'(x) = -\dfrac{1}{5}f(x)$. D'après le cours la réponse est

$$f(x) = Ce^{-\frac{1}{5}x}$$

avec C constante réelle.

Supposons maintenant que $f(-2) = 1$; on a donc $Ce^{\frac{2}{5}} = 1$ c'est à dire $C = e^{-\frac{2}{5}}$ et par conséquent $\boxed{f(x) = e^{-\frac{x+2}{5}}}$ est la solution qui vérifie $f(-2) = 1$.

Exercice 3: a) Il s'agit de trouver toutes les fonctions $y(x)$ telles que

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0.$$

En fait on cherche celles d'entre elles qui ne s'annulent pas sur leur intervalle de définition. On peut alors mettre $y(x)$ au dénominateur, et l'équation équivaut à

$$y'(x) = -a(x)y(x)$$
$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x).$$

On sait qu'une primitive de $\dfrac{y'(x)}{y(x)}$ est $\ln(|y(x)|)$. Celle de $a(x)$, on l'appelle $A(x)$; on a donc

$$\begin{aligned} \ln(|y(x)|) &= A(x) + C \\ |y(x)| &= e^{\ln(|y(x)|)} = e^{A(x)+C} \end{aligned}$$

avec C constante réelle. Sachant que $e^{A(x)+C} = e^{A(x)}e^{C}$ et que $|y(x)|$ vaut $y(x)$ ou $-y(x)$, on en déduit

$$y(x) = Ke^{A(x)}$$

avec K constante réelle.

b) Dans cette question on suppose que la fonction y_p est une des solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x),$$

et on veut trouver toutes les autres fonctions y qui sont solutions de cette équation. On soustrait:

$$\begin{aligned} & y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ & y_p'(x) + a(x)y_p(x) = b(x) \\ \Rightarrow\ & (y'(x) - y_p'(x)) + a(x)(y(x) - y_p(x)) = 0 \end{aligned}$$

donc en fait la fonction $y - y_p$ est solution de l'équation $y'(x) + a(x)y(x) = 0$. On a calculé à la question a) les solutions de cette équation, ce sont les fonctions $y(x) = Ke^{A(x)}$ avec K constante réelle. Appelons y_h ces fonctions, on a donc $y - y_p = y_h$ c'est à dire $\boxed{y = y_p + y_h}$

(voir aux exercices 4,5,6,7,8,10,13 comment calculer y_p; en général $y_p(x)$ ressemble à $b(x)$).

Exercice 4: a) D'après l'énoncé $y_p(x) = C$ constante; sa dérivée est donc nulle. On reporte dans l'équation différentielle $y'(x) - 2xy(x) = x$ et on obtient $C = -\dfrac{1}{2}$.

b) On résoud $y'(x) - 2xy(x) = 0$ comme à l'exercice 3a); on obtient $y(x) = Ke^{x^2}$ et on appelle $y_h(x)$ cette solution. D'après 3b),

$$y(x) = -\frac{1}{2} + Ke^{x^2}.$$

Exercice 5: a) D'après l'énoncé $y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$; sa dérivée est $y_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$. On reporte dans l'équation différentielle et on obtient $y_p(x) = \dfrac{\cos(x) + \sin(x)}{2}$.

b) On résoud $y'(x) + y(x) = 0$ comme à l'exercice 3a) (ou en utilisant le cours); on obtient $y(x) = Ke^{-x}$ et on appelle $y_h(x)$ cette solution. D'après 3b),

$$y(x) = \frac{\cos(x) + \sin(x)}{2} + Ke^{-x}.$$

Exercice 6: a) D'après l'énoncé $y_p(x) = ae^{-x}$; sa dérivée est $y_p'(x) = -ae^{-x}$. On reporte dans l'équation différentielle et on obtient $a = 1$ c'est à dire $y_p(x) = e^{-x}$.

b) On résoud $y'(x) + 3y(x) = 0$; on obtient $y(x) = Ke^{-3x}$ et on appelle $y_h(x)$ cette solution. D'après 3b),

$$y(x) = e^{-x} + Ke^{-3x}.$$

Si $y(0) = 1$, alors $e^{-0} + Ke^{-3\cdot 0} = 1$ donc $K = 0$ et $y(x) = e^{-x}$.

Exercice 7: a) D'après l'énoncé $y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$; sa dérivée est $y_p'(x) = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)$. On reporte dans l'équation différentielle et on obtient $y_p(x) = \dfrac{60\cos(2x) - 15\sin(2x)}{17}$.

b) On résoud $2y'(x) + y(x) = 0$ comme à l'exercice 3a) (ou en utilisant le cours); on obtient $y(x) = Ke^{-\frac{1}{2}x}$ et on appelle $y_h(x)$ cette solution. D'après 3b),

$$y(x) = \frac{60\cos(2x) - 15\sin(2x)}{17} + Ke^{-\frac{1}{2}x}.$$

Si $y(0) = 0$ alors $\dfrac{60}{17} + Ke^{0} = 0$ donc $K = -\dfrac{60}{17}$ et

$$y(x) = \frac{60\cos(2x) - 15\sin(2x)}{17} - \frac{60}{17}e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Exercice 8: a) Même méthode qu'à l'exercice 4, on obtient $y_p(x) = \dfrac{E_0}{R}$ et $y_h(x) = Ke^{-\frac{R}{L}t}$ d'où

$$y(t) = \frac{E_0}{R} + Ke^{-\frac{R}{L}t}.$$

b) Même méthode qu'aux l'exercices 5 et 7, on obtient $y_p(x) = \dfrac{-L\omega\cos(\omega t) + R\sin(\omega t)}{R^2 + L^2\omega^2}\ E_0$ et $y_h(x) = Ke^{-\frac{R}{L}t}$ d'où

$$y(t) = \frac{-L\omega\cos(\omega t) + R\sin(\omega t)}{R^2 + L^2\omega^2}\ E_0 + Ke^{-\frac{R}{L}t}.$$

Exercice 10: a) $y(x) = -2\cos^2(x) + K\cos(x)$.

b) $y(x) = \dfrac{x^3}{7} + \dfrac{K}{\sqrt{x}}$.

c) $y(x) = 2 + \dfrac{K}{\sqrt{1+x^2}}$.

d) $y(x) = x + Kx(x-1)$.