Université de Provence 2005–2006

Techniques Mathématiques de Base

PLANCHE 6

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle $x'(t) = 3x(t)$ avec $x(0) = 3$.

Exercice 2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = -5f'(x)$ pour tout x. On suppose que la courbe représentant f dans le repère orthonormé passe par le point $(-2, 1)$. Déterminer f et tracer sa courbe.

Exercice 3.

a) Écrire la solution générale de l'équation différentielle homogène:

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0 \tag{e}$$

On notera y_h cette solution.

b) Soit y_p une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre:

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \tag{E}$$

Montrer que toute solution de (E) se met sous la forme $y = y_p + y_h$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle (E) $y'(x) - 2xy(x) = x$

et l'équation sans second membre associée (e) $y'(x) - 2xy(x) = 0$.

a) Pour quelle(s) valeur(s) de C la fonction constante $y(x) = C$ est-elle solution de (E)?

b) Résoudre (e); puis en déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 5. On considère l'équation différentielle (E) $y' + y = \cos(x)$, et l'équation sans second membre associée (e) $y' + y = 0$.

a) Trouver une solution de (E) sous la forme $y(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$.

b) Résoudre (e).

c) En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 6.

a) Trouver une fonction g de la forme $g(x) = ae^{-x}$ telle que $g'x) + 3g(x) = 2e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculer la solution de l'équation différentielle

$$y'(x) + 3y(x) = 2e^{-x}$$

avec comme conditions initiales $y(0) = 1$.

Exercice 7.

a) Trouver une fonction g de la forme $g(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$ telle que

$$2g'x) + g(x) = -15\sin(2x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculer la solution de l'équation différentielle

$$2y'(x) + y(x) = -15\sin(2x)$$

avec comme conditions initiales $y(0) = 0$.

Exercice 8. L'intensité $I(t)$ qui parcourt un circuit constitué d'une résistance R (ohms) et d'une self d'inductance L (henrys) vérifie l'équation différentielle $LI'(t) + RI(t) = E(t)$ où $E(t)$ désigne la *f.é.m* appliquée aux extrémités.

Résoudre l'équation différentielle

a) quand $E(t) = E_0$ constante; b) quand $E(t) = E_0\sin(wt)$.

Énoncé à rédiger et à rendre en travaux dirigés.

Exercice 9. Soit l'équation différentielle (E) $y' = y(1-y)$.

a) Pour quelle(s) valeur(s) de C la fonction constante $y(x) = C$ est-elle solution de (E)?

b) Trouver deux constantes A et B telles que $\dfrac{1}{y(1-y)} = \dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{1-y}$.

c) En déduire une primitive de $\dfrac{y'}{y(1-y)}$ (pour toute fonction y définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$).

d) Résoudre l'équation différentielle (E).

Énoncés complémentaires.

Exercice 10. Intégrer les équations différentielles suivantes :

a) $y' + y\tan(x) = \sin(2x)$; b) $2xy' + y = x^3$

c) $(1+x^2)y' + xy - 2x = 0$; d) $x(x-1)y' - (2x-1)y + x^2 = 0$;

Exercice 11. On note E l'ensemble des fonctions numériques f admettant des dérivées f', f'', $f^{(3)}$ continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation différentielle $(x-1)y'' - xy' + y = 0$.

a) Montrer que si $f \in E$ alors pour tout $x \neq 1$, $f^{(3)}(x) = f''(x)$, puis que $f^{(3)} = f''$.

b) En déduire que si $f \in E$ alors f'' est solution de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

c) A l'aide de deux intégrations, montrer que $f \in E$ est de la forme $f(x) = ax + be^x$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 12. Résoudre l'équation différentielle $xy' = e^{-xy} - y$ en introduisant la fonction $u(x) = xy(x)$.

Exercice 13. La vitesse d'un parachutiste au cours de sa chute à partir du moment où le parachute s'ouvre, vérifie $mv'(t) = mg - bv(t)^2$ où m est la masse du parachutiste, et b une constante de la résistance de l'air. Résoudre l'équation différentielle. Que se passe t-il pour la vitesse lorsque $t \to +\infty$?