Université de Provence 2008-2009
Licence MI 1ère année-S1

Mathématiques générales I

Primitives et intégrales

Table des matières

1 Primitives d'une fonction **1**
1.1 Généralités 1
1.2 Primitives prenant une valeur donnée en un point donné 2

2 Intégrale d'une fonction sur un intervalle **2**
2.1 Définition de l'intégrale 2
2.2 Propriétés de l'intégrale 3

3 Intégrale et aire **3**

4 Opérations sur les primitives **5**

5 Intégration par parties **5**

6 Changement de variables **7**

7 Primitives des fonctions usuelles **9**

1 Primitives d'une fonction

1.1 Généralités

Définition 1.1 *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$). On appelle primitive de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I telle que*

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple La fonction $f : x \mapsto 12x+5$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $F : x \mapsto 6x^2+5x$. Mais elle admet aussi pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $F_1 : x \mapsto 6x^2+5x+2$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F'(x) = F_1'(x) = 12x + 5 = f(x).$$

Théorème 1.2 *(admis) Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.*

Proposition 1.3 *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f possède une primitive F sur I, alors chaque primitive G de f est de la forme $G = F + c$ où c est une constante réelle.*

Démonstration Soient F et G deux primitives de f sur I. Alors on a

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = G'(x) = f(x)$$

et donc

$$\forall x \in I, \quad F'(x) - G'(x) = (F - G)'(x) = 0.$$

La fonction $F - G$ étant continue, dérivable sur l'intervalle I et de dérivée nulle, elle est constante sur I, d'où l'existence d'une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in I, \quad F(x) - G(x) = c.$$

□

Remarque Interprétation graphique : Les courbes représentatives des fonctions primitives de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se déduisent les unes des autres par des translations de vecteur $c\vec{j}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

1.2 Primitives prenant une valeur donnée en un point donné

Théorème 1.4 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $x_0 \in I$ et y_0 un nombre réel quelconque.*
Alors il existe une primitive F de f sur I et une seule telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration Soit G une primitive de f sur I. Alors, d'après la proposition précédente, toute primitive F de f sur I est de la forme $F : x \mapsto G(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$.
La condition $F(x_0) = y_0$ s'écrit $G(x_0) + c = y_0$ c'est-à-dire $c = y_0 - G(x_0)$.
Puisque nous avons trouvé une valeur et une seule de c, il existe donc une primitive et une seule de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$. Cette primitive est donnée par

$$F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0).$$

□

Exemple Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x + 1$.
Déterminer la primitive F de f qui s'annule pour $x = 2$.
Les primitives de f sur R sont les fonctions F de la forme

$$F(x) = 2x^2 + x + c \qquad \text{où } c \in \mathbb{R}.$$

Parmi toutes ces fonctions, celle qui s'annule pour $x = 2$ vérifie $F(2) = 0$ c'est-à-dire

$$F(2) = 2 \times 2^2 + 2 + c = 10 + c = 0.$$

On en déduit $c = -10$. La primitive de f qui s'annule pour $x = 2$ est donnée par $F(x) = 2x^2 + x - 10$.

2 Intégrale d'une fonction sur un intervalle

2.1 Définition de l'intégrale

Définition 2.1 *Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F une de ses primitives sur I. Soient a et b deux points de I.*
Le nombre réel $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ est appelé intégrale de f entre a et b et est noté $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

$\int_a^b f(x)dx$ se lit « somme de a à b de f » ou « somme de a à b de $f(x)dx$ ».

Remarques 1. **Attention**, l'ordre de a et de b est important. Le nombre a est appelé borne inférieure et le nombre b est appelé borne supérieure de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

2. La lettre x qui figure dans la notation $\int_a^b f(x)dx$ est une variable muette, appelée variable d'intégration, autrement dit
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$$
3. En prenant $a = b$, on obtient $\int_a^a f(x)dx = 0$.
4. La valeur d'une intégrale ne dépend pas de la primitive choisie. En effet, si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors on a, pour tout $x \in I$, $F_2(x) = F_1(x) + c$ où c est une constante réelle. Alors,
$$[F_2(x)]_a^b = [F_1(x) + c]_a^b = (F_1(b) + c) - (F_1(a) + c) = F_1(b) - F_1(a) = [F_1(x)]_a^b.$$

2.2 Propriétés de l'intégrale

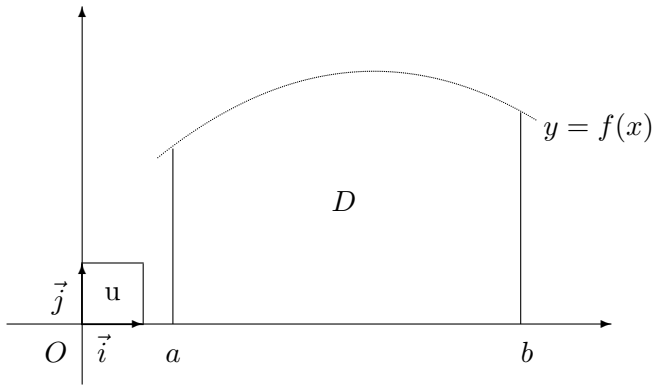
Nous admettrons les propriétes suivantes de l'intégrale d'une fonction.

Proposition 2.2 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :*

1. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
3. $[\forall x \in [a, b], \quad f(x) \geqslant 0] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \geqslant 0$
4. $[\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leqslant g(x)] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$
5. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$
6. **Relation de Chasles**
Soit c un point de $[a, b]$. Alors on a $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

3 Intégrale et aire

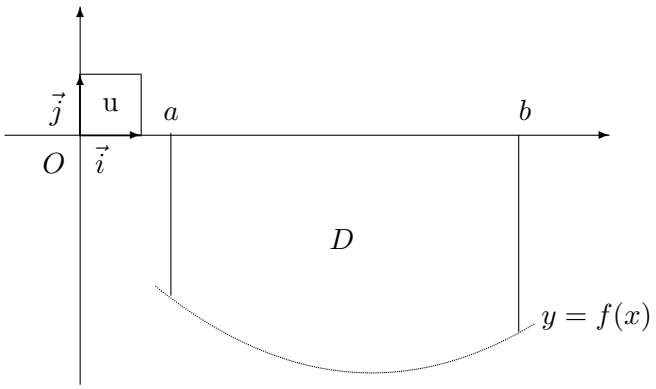
Théorème 3.1 *Soit f une fonction définie, continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$ (avec $a \leqslant b$). Alors, l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$ représente l'aire délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.*



u représente l'unité d'aire

$$I = \int_a^b f(x)dx = \text{Aire}(D).$$

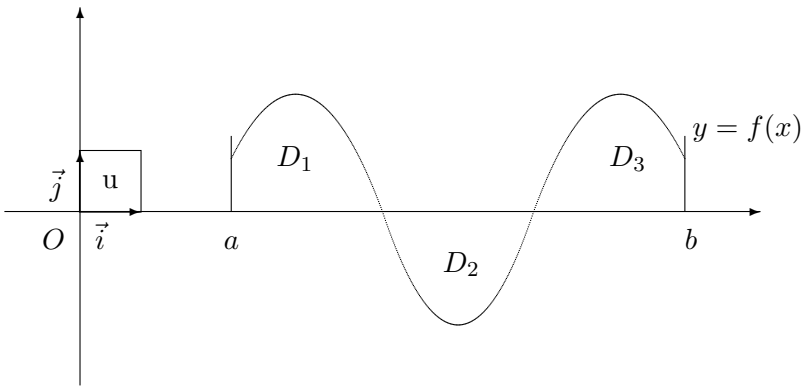
Corollaire 3.2 *Soit f une fonction définie, continue et négative sur l'intervalle $[a, b]$ (avec $a \leqslant b$). Alors, l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$ représente l'opposé de l'aire délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.*



u représente l'unité d'aire

$$I = \int_a^b f(x)dx = -\text{Aire}(D).$$

Corollaire 3.3 *Soit f une fonction définie, continue et de signe quelconque sur l'intervalle $[a, b]$ (avec $a \leqslant b$).*
Alors, l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$ représente la somme des aires des domaines situés au-dessus de l'axe des abscisses diminuée de la somme des aires des domaines situés au-dessous de l'axe des abscisses.



L'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$ correspond à : $\text{Aire}(D_1) - \text{Aire}(D_2) + \text{Aire}(D_3)$

u représente l'unité d'aire

4 Opérations sur les primitives

Proposition 4.1 *Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle ouvert I. Si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I, alors*

- *$F+G$ est une primitive de $f+g$,*
- *$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λF est une primitive de λf sur I.*

Démonstration Cette proposition est une conséquence directe des propriétés des fonctions dérivées. Puisque la dérivée de la somme de deux fonctions dérivables est la somme des fonctions dérivées, on a, pour tout $x \in I$,

$$(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

donc $F+G$ est bien une primitive de $f+g$ sur I.
De même, pour tout $x \in I$,

$$(\lambda F)'(x) = \lambda F'(x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x)$$

et λF est une primitive de λf sur I. □

De même, la règle de dérivation des fonctions composées permet de dresser un tableau qui se trouve en fin de chapitre, où u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

Exemples 1. Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 5x(x^2-1)^2$.
La fonction f est une fonction polynôme définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
Posons $u(x) = x^2 - 1$.
Alors $u'(x) = 2x$ et $f(x) = 5 \times \frac{1}{2}u'(x) \times u(x)^2 = \frac{5}{2}u'(x)u(x)^2$.
On en déduit que les primitives F de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$F(x) = \frac{5}{2} \times \frac{1}{3}u(x)^3 + c$$

où c est une constante réelle.

2. Déterminer les primitives sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.
Sur l'intervalle I, le cosinus ne s'annule pas et la fonction f est bien définie et continue sur cet intervalle.
Posons $u(x) = \cos x$. Alors $u'(x) = -\sin x$ et $f(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$.
On en déduit que les primitives F de f sur l'intervalle I sont de la forme

$$F(x) = \frac{1}{u(x)} + c = \frac{1}{\cos x} + c$$

où c est une constante réelle.

5 Intégration par parties

Théorème 5.1 *Soient u et v deux fonctions définies et continûment dérivables sur $[a,b]$. Alors on a la formule d'intégration par parties :*

$$\begin{aligned}\int_a^b u'(x)v(x)dx &= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx \\ &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)dx.\end{aligned}$$

Démonstration On a, pour tout $x \in [a,b]$,

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

La fonction uv est donc une primitive sur $[a,b]$ de la fonction $u'v + uv'$. On en déduit que

$$\int_a^b \left[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right] dx = [u(x)v(x)]_a^b$$

et donc, en utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b$$

d'où la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

□

Cette formule d'intégration par parties ramène le calcul de l'intégrale $\int_a^b u'(x)v(x)dx$ à celui de l'intégrale $\int_a^b u(x)v'(x)dx$. Dans bien des cas, le calcul de l'intégrale $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ est plus simple que celui de l'intégrale $\int_a^b u'(x)v(x)dx$.

Exemples 1. Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t\cos t dt$:

Posons

$$\forall t \in [0,x], \quad u(t) = t \quad \text{et} \quad v'(t) = \cos t.$$

Alors

$$\forall t \in [0,x], \quad u'(t) = 1 \quad \text{et} \quad v(t) = \sin t.$$

La fonction v ainsi choisie est une primitive de la fonction v (celle qui vaut 0 en $t = 0$). Le choix de la primitive (c'est-à-dire de la constante) n'a aucune importance ici. La formule d'intégration par parties nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\int_0^x t\cos t dt &= [t\sin t]_0^x - \int_0^x 1\sin t dt \\ &= x\sin x - 0\sin 0 - \int_0^x \sin t dt \\ &= x\sin x - [-\cos t]_0^x \\ &= x\sin x + \cos x - 1.\end{aligned}$$

2. Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \ln t dt$:

Cette intégrale est définie pour $x \in]0,+\infty[$. Soit donc $x \in]0,+\infty[$. Posons

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad u(t) = \ln t \quad \text{et} \quad v'(t) = 1.$$

Alors

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad u'(t) = \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad v(t) = t$$

et on obtient

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln t dt &= [t\ln t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} t dt \\ &= x\ln x - 1\ln 1 - \int_1^x dt \\ &= x\ln x - [t]_1^x \\ &= x\ln x - x + 1.\end{aligned}$$

6 Changement de variables

Théorème 6.1 *Soit φ une fonction numérique définie sur $[a,b]$, dérivable et de dérivée continue. Soit f une fonction numérique, définie et continue sur l'intervalle fermé $\varphi([a,b])$. Alors on a la formule de changement de variable :*

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)ds.$$

Démonstration Posons, pour tout $t \in [a,b]$,

$$F(t) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(t)} f(x)dx \quad \text{et} \quad G(t) = \int_a^t f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx.$$

D'après les hypothèses, ces deux fonctions sont bien définies sur l'intervalle $[a,b]$. De plus, les fonction $f \circ \varphi$ et φ' étant continues, la fonction G est dérivable sur $[a,b]$ et on a :

$$\forall t \in [a,b], \quad G'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

D'autre part, la fonction F est de la forme $F = H \circ \varphi$ où H est la fonction définie sur $\varphi([a,b])$ par

$$H(u) = \int_{\varphi(a)}^{u} f(x)dx.$$

La fonction H est dérivable et on a

$$\forall u \in \varphi([a,b]), \quad H'(u) = f(u)$$

d'où la dérivabilité de la fonction F et l'expression de sa dérivée :

$$\forall t \in [a,b], \quad F'(t) = H'[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t) = G'(t).$$

Les fonctions F et G ayant la même dérivée sur $[a,b]$, on en déduit que la fonction $F - G$ est constante (car de dérivée nulle) et donc

$$\forall t \in [a,b], \quad F(t) - G(t) = F(a) - G(a).$$

Or

$$F(a) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(a)} f(x)dx = 0 \quad \text{et} \quad G(a) = \int_a^a f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = 0$$

d'où

$$\forall t \in [a,b], \quad F(t) = G(t).$$

□

Proposition 6.2 *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent, si de plus φ est bijective, on a*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt.$$

Démonstration On a d'après le théorème précédent

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

Il suffit de poser $\alpha = \varphi(a)$ et $\beta = \varphi(b)$ et puisque φ est bijective, elle admet une application réciproque φ^{-1} et on a $a = \varphi^{-1}(\alpha)$ et $b = \varphi^{-1}(\beta)$. □

Remarques 1. Cette proposition est utile lorsque l'on utilise un changement de variable pour calculer une primitive d'une fonction.

2. Dans la pratique, pour effectuer un changement de variable, on utilise souvent la notation différentielle.
Si l'on pose $t = \varphi(x)$, alors on écrit, avec la notation différentielle, $dt = \varphi'(x)dx$ et la formule de changement de variable donne

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Exemples 1. Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$:

On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Posons $t = \cos x$, alors $dt = -\sin x dx$ et

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx &= \int_{\cos 0}^{\cos\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{t}dt = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{1}{t}dt = [-\ln t]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2} = \frac{\ln 2}{2}.\end{aligned}$$

2. Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$:

Posons $t = x^2 + 1$, alors $dt = 2xdx$ et

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_1^2 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \left[\sqrt{t}\right]_1^2 = \sqrt{2} - 1.$$

3. Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$:

Posons $x = \sin t$, alors $dx = \cos t dt$ et

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt\end{aligned}$$

car sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos t \geqslant 0$ et donc

$$\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t.$$

D'autre part $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$ d'où

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \left[\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

7 Primitives des fonctions usuelles

Fonction f définie par	Primitive F de f	sur l'intervalle I
$f(x) = a$ avec a constante	$F(x) = ax + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n,\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c,\ c \in \mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c,\ c \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + c,\ c \in \mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$, $n \in \mathbb{N}$
$f(x) = \tan x$	$F(x) = -\ln\lvert\cos x\rvert + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$, $n \in \mathbb{N}$
$f(x) = \operatorname{ch} x$	$F(x) = \operatorname{sh} x + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{sh} x$	$F(x) = \operatorname{ch} x + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$F(x) = \operatorname{th} x + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Fonction f définie par	Primitive F de f
$f(x) = u'(x)u(x)^n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$	$F(x) = \frac{1}{n+1}u(x)^{n+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)^2}$	$F(x) = -\frac{1}{u(x)} + c$, $c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I, \quad u(x) \neq 0$
$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)} + c$, $c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I, \quad u(x) > 0$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)^n}$, $(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)$	$F(x) = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{u(x)^{n-1}} + c$, $c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I, \quad u(x) \neq 0$
$f(x) = u'(x)e^{u(x)}$	$F(x) = e^{u(x)} + c$, $c \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$	$F(x) = \ln\lvert u(x)\rvert + c$, $c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I, \quad u(x) \neq 0$