MATHEMATIQUES GENERALES 1

Planche 10 : Intégration

Exercice 1. Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \alpha x + \beta$.

1. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$, $f(a) \geqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ en considérant l'intégrale comme une aire.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x+1}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + \frac{9}{2}x + 3$.

1. Représenter graphiquement les fonctions f et g dans un repère orthonormé et étudier la position relative des deux courbes.
2. Calculer l'aire de la partie fermée du plan limitée par ces deux courbes.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx$ c) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ d) $\displaystyle\int_{\sinh(1)}^{\sinh(2)} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

e) $\displaystyle\int_0^2 |1-x|dx$.

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)e^x dx$ b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

Exercice 5. Effectuer deux intégrations par parties pour calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+1)^2 e^{-x} dx$ b) $\displaystyle\int_a^b e^x \cos x dx$ c) $\displaystyle\int_{-\pi}^0 x^2 \sin 2x dx$.

Exercice 6. On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos^2 x dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\sin^2 x dx$.

1. Calculer $I + J$.
2. Calculer $I - J$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. En déduire les valeurs de I et de J.

Exercice 7. Calculer les primitives suivantes et préciser sur quel intervalle elles sont définies :

a) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}dx$ b) $\displaystyle\int e^{\sin(x)}\sin(x)\cos(x)dx$ c) $\displaystyle\int \cos^3(x)dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx$

e) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$ f) $\displaystyle\int \sin x\cos^3 x dx$ g) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ h) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}dx$

i) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

Exercice 8. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$:

a) Par un changement de variable.
b) Sans calcul, en interprétant l'aire géométriquement.

Exercice 9. Soit n un entier naturel.
Calculer l'intégrale

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$$

Indication : si n est plus grand que 2, intégrer par parties afin d'obtenir la relation de récurrence $nJ_n = (n-1)J_{n-2}$.