Rappel de cours (droites et plans)

I – Les équations suivantes donnent les conditions pour qu'un point $M(x,y)$ appartienne à une droite (dans le plan).

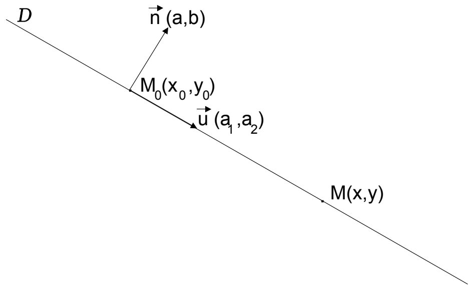
Équation cartésienne d'une droite $(\mathcal{D})$ **dans le plan:**

$$ax + by + c = 0$$

où le vecteur $\vec{n}(a,b)$ est orthogonal à la droite. On l'appelle vecteur normal à la droite $(\mathcal{D})$ (le mot "normal" signifie la même chose que "orthogonal" ou "perpendiculaire").

Variantes:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$



(où $M_0(x_0, y_0)$ est un point fixé de la droite).

Cette équation équivaut à

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

Équation paramétrique d'une droite $(\mathcal{D})$ **dans le plan:**

$$\begin{cases} x = a_1 t + b_1 \\ y = a_2 t + b_2 \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$.

Le vecteur $\vec{u}(a_1, a_2)$ est parallèle à la droite (on l'appelle vecteur directeur), et le point $M_0(b_1, b_2)$ appartient à la droite. Ces équations équivalent à

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}.$$

Si $\vec{n}(a,b)$ est vecteur normal à la droite $(\mathcal{D})$, on peut choisir $\vec{u}(b, -a)$ ou $\vec{u}(-b, a)$ comme vecteur directeur de $(\mathcal{D})$.

II – Les équations suivantes donnent les conditions pour qu'un point $M(x,y,z)$ appartienne à un plan ou à une droite (dans l'espace).

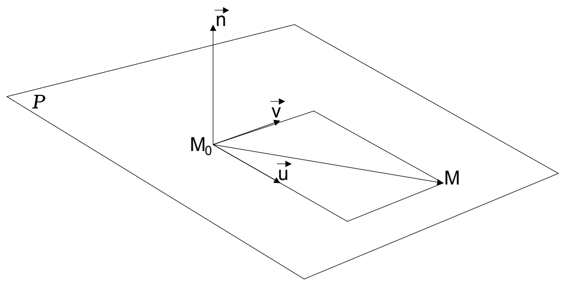
Équation cartésienne d'un plan $(\mathcal{P})$ **dans l'espace:**

$$ax + by + cz + d = 0$$

où le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est orthogonal au plan.

Variantes:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$



(où $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est un point fixé du plan).

Cette équation équivaut à

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

Équation paramétrique d'un plan $(\mathcal{P})$ dans l'espace:

$$\left\{\begin{array}{l} x = a_1 s + b_1 t + c_1 \\ y = a_2 s + b_2 t + c_2 \\ z = a_3 s + b_3 t + c_3 \end{array}\right.$$

avec $s, t \in \mathbb{R}$.

Les vecteurs $\vec{u}(a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{v}(b_1, b_2, b_3)$ sont parallèles au plan (ils sont appelés vecteurs directeurs du plan) et le point $M_0(c_1, c_2, c_3)$ appartient au plan. Ces équations équivalent à

$$\overrightarrow{M_0 M} = s\vec{u} + t\vec{v}.$$

Équation cartésienne d'une droite $(\mathcal{D})$ dans l'espace:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{array}\right.$$

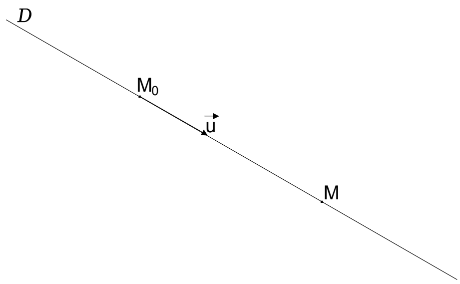
Équation paramétrique d'une droite $(\mathcal{D})$ dans l'espace:

$$\left\{\begin{array}{l} x = a_1 t + b_1 \\ y = a_2 t + b_2 \\ z = a_3 t + b_3 \end{array}\right.$$

avec $t \in \mathbb{R}$.

Le vecteur $\vec{u}(a_1, a_2, a_3)$ est parallèle à la droite (vecteur directeur) et le point $M_0(b_1, b_2, b_3)$ appartient à la droite. Ces équations équivalent à

$$\overrightarrow{M_0 M} = t\vec{u}.$$



Rappel des propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel

Étant donnés deux vecteurs $\vec{v}(x, y, z)$ et $\vec{w}(x', y', z')$ de l'espace, le produit scalaire, qu'on notera $\vec{v} \cdot \vec{w}$, est défini par

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = xx' + yy' + zz'.$$

Deux vecteurs sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul. On appellera norme du vecteur $\vec{v}$ le réel positif $\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et on le notera $\|\vec{v}\|$.

Étant donnés deux vecteurs $\vec{v}(x, y, z)$ et $\vec{w}(x', y', z')$, le produit vectoriel, qu'on notera $\vec{v} \wedge \vec{w}$, est défini par

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (yz' - y'z, zx' - z'x, xy' - x'y).$$

On démontre que $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$, et que le système de vecteurs $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w}\}$ est direct c'est à dire l'angle $(\vec{v}, \vec{w})$ vu du côté du vecteur $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est positif.

Deux formules à connaître sur le produit scalaire et le produit vectoriel:

$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \ \|\vec{w}\| \ \cos(\vec{v}, \vec{w})$,

$\|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \ \|\vec{w}\| \ |\sin(\vec{v}, \vec{w})| =$ aire du parallélogramme défini par $\vec{v}$ et $\vec{w}$.