Propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel

Étant donnés deux vecteurs $\vec{v}(x,y,z)$ et $\vec{w}(x',y',z')$, le produit scalaire, qu'on notera $\vec{v}\cdot\vec{w}$, est défini par

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = xx' + yy' + zz'.$$

Deux vecteurs sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul. On appellera norme du vecteur $\vec{v}$ le réel positif $\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$ et on le notera $||\vec{v}||$.

En particulier, il est clair que les trois vecteurs de base canonique

$$\vec{i}(1,0,0), \vec{j}(0,1,0), \vec{k}(0,0,1)$$

sont orthogonaux et de norme 1. Soit $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ un autre triplet de vecteurs orthogonaux et de norme 1 (c'est à dire base orthonormée), on admettra que

si $\vec{v} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$ et $\vec{w} = a'\vec{v}_1 + b'\vec{v}_2 + c'\vec{v}_3$, alors $\vec{v}\cdot\vec{w} = aa' + bb' + cc'$.

Étant donnés deux vecteurs $\vec{v}(x,y,z)$ et $\vec{w}(x',y',z')$, le produit vectoriel, qu'on notera $\vec{v}\wedge\vec{w}$, est défini par

$$\vec{v}\wedge\vec{w} = (yz' - y'z, zx' - z'x, xy' - x'y).$$

On démontre que $\vec{v}\wedge\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$, et que le système de vecteurs $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}\wedge\vec{w}\}$ est direct c'est à dire l'angle $(\vec{v}, \vec{w})$ vu du côté du vecteur $\vec{v}\wedge\vec{w}$ est positif.

Soit $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ une base orthonormée directe, on admettra que

si $\vec{v} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$ et $\vec{w} = a'\vec{v}_1 + b'\vec{v}_2 + c'\vec{v}_3$, alors $\vec{v}\wedge\vec{w} = (bc' - b'c, ca' - c'a, ab' - a'b)$.

Les principales formules à connaître sur le produit scalaire et le produit vectoriel sont (en notant $(\vec{v}, \vec{w})$ l'angle non orienté entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$, compris entre 0 et π)

$\vec{v}\cdot\vec{w} = ||\vec{v}||\ ||\vec{w}||\ \cos(\vec{v}, \vec{w})$,

$||\vec{v}\wedge\vec{w}|| = ||\vec{v}||\ ||\vec{w}||\ \sin(\vec{v}, \vec{w})$ = aire du parallélogramme défini par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Rappel de cours (droites et plans)

I – Les équations suivantes donnent les conditions pour qu'un point $M(x, y)$ appartienne à une droite (dans le plan).

Équation cartésienne d'une droite $\mathcal{D}$ dans le plan :

$$ax + by + c = 0$$

où le vecteur $\overrightarrow{n}(a, b)$ est orthogonal à la droite.

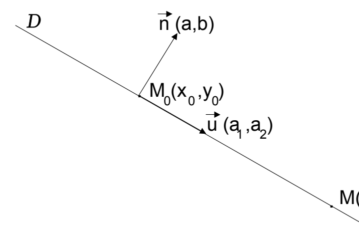
Variantes :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

(où $M_0(x_0, y_0)$ est un point fixé de la droite).

Cette équation équivaut à

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$



Équation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$ dans le plan :

$$\begin{cases} x = a_1 t + b_1 \\ y = a_2 t + b_2 \end{cases}$$

avec $t \in \mathbf{R}$.

Le vecteur $\overrightarrow{u}(a_1, a_2)$ est parallèle à la droite et le point $M_0(b_1, b_2)$ appartient à la droite. Ces équations équivalent à

$$\overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{u}.$$

II – Les équations suivantes donnent les conditions pour qu'un point $M(x, y, z)$ appartienne à un plan ou à une droite (dans l'espace).

Équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$ dans l'espace :

$$ax + by + cz + d = 0$$

où le vecteur $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ est orthogonal au plan.

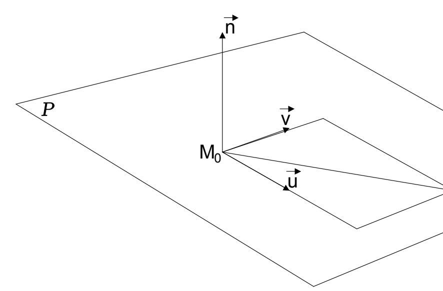
Variantes :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

(où $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est un point fixé du plan).

Cette équation équivaut à

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$



Équation paramétrique d'un plan $\mathcal{P}$ dans l'espace :

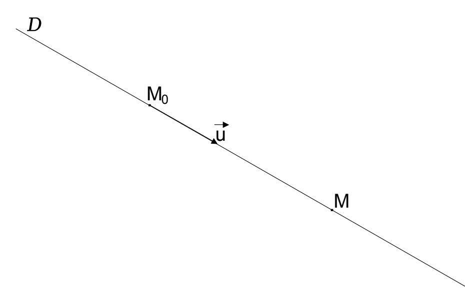
$$\begin{cases} x = a_1 s + b_1 t + c_1 \\ y = a_2 s + b_2 t + c_2 \\ z = a_3 s + b_3 t + c_3 \end{cases}$$

avec $s, t \in \mathbf{R}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}(a_1, a_2, a_3)$ et $\overrightarrow{v}(b_1, b_2, b_3)$ sont parallèles au plan et le point $M_0(c_1, c_2, c_3)$ appartient au plan. Ces équations équivalent à

$$\overrightarrow{M_0 M} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}.$$

Équation cartésienne d'une droite $\mathcal{D}$ dans l'espace :

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$



Équation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$ dans l'espace :

$$\begin{cases} x = a_1 t + b_1 \\ y = a_2 t + b_2 \\ z = a_3 t + b_3 \end{cases}$$

avec $t \in \mathbf{R}$.
Le vecteur $\overrightarrow{u}(a_1, a_2, a_3)$ est parallèle à la droite et le point $M_0(b_1, b_2, b_3)$ appartient à la droite. Ces équations équivalent à

$$\overrightarrow{M_0 M} = t\overrightarrow{u}.$$