1 Solutions exercices Courbes planes

1.1 courbes paramétrées

Exercice 1 *Dans le plan muni d'un repère orthonormé (o, $\vec{i}$, $\vec{j}$), soit C la courbe définie sur* $[0; 2\pi]$

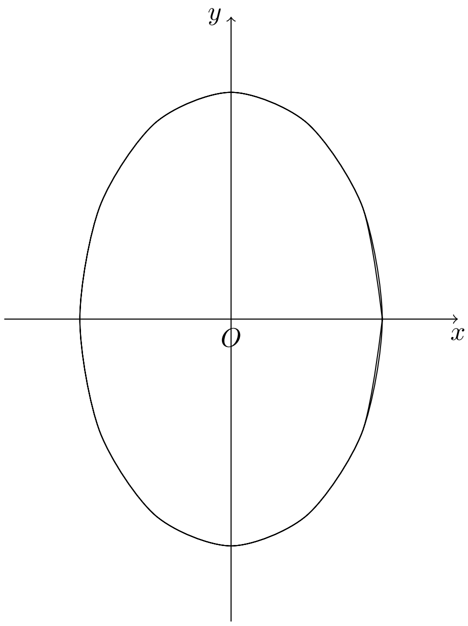
$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{cases}$$

a) Reconnaître et représenter rapidement C
b) Déterminer une représentation cartésienne de C

Solution 1 *La courbe définie sur* $[0; 2\pi]$

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{cases}$$

est une ellipse ; l'étude est facile.
La courbe :



Une représentation cartésienne de C est $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Exercice 2 *Etudier la courbe paramétrée :*

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

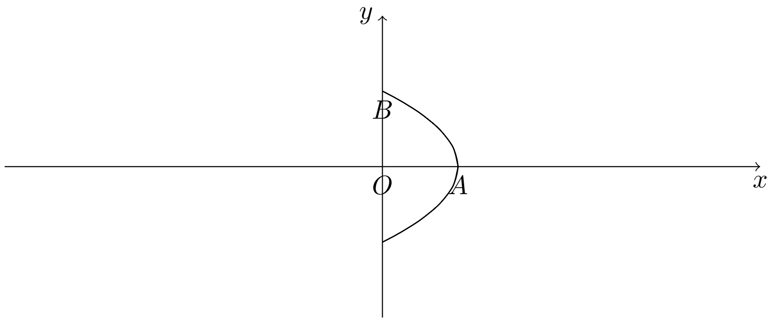
Plus précisement :
1) Définir un intervalle d'étude en précisant les symétries associées.
2) Donner le tableau de variations
3) Etudier les points particuliers et leur tangente.
4) Tracer la courbe

Solution 2 *La courbe définie sur* $[0; 2\pi]$

Les fonctions x et y sont 2π périodiques ;
x est paire, y est impaire :
On peut faire l'étude sur $[0, \pi]$ et faire ensuite une symétrie par rapport à (Ox)
Les dérivées :
$x'(t) = -2\cos t \sin t$
$y'(t) = \cos t$
Le tableau de varaitions :

t	0 $\frac{\pi}{2}$	π
x’	-	+
x	↘	↗
y’	+	-
y	↗	↘

Points particuliers :
En $t = 0$:
Le point est en A(1,0)
La tangente est portée par le vecteur $\overrightarrow{v}(0,1)$:
Elle est verticale ;
En $t = \frac{\pi}{2}$:
Le point est en B(0,1)
C’est un point stationnaire :
Comme $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\frac{y'(t)}{x'(t)})$ $=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\frac{-1}{2\sin t}) = \frac{-1}{2}$, la pente de la tangente est $\frac{-1}{2}$
En $t = \pi$:
Le point est en A(1,0)
La tangente est portée par le vecteur $\overrightarrow{v}(0,-1)$: elle est verticale ;



La courbe :

Le point décrit la portion ABA, puis AB’A, où B’ est le symétrique de B par rapport à (Ox)

Exercice 3 *Etudier la courbe paramétrée :*

$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 3(t - sint) \\ y(t) = 3(1\text{-} \cos t) \end{array} \right.$ (cycloïde)

Interprétation mécanique : roulement sans glissement d’une circonférence sur un axe : une roue C de centre A et de rayon 3 unités roule sans glisser sur un axe horizontal ; à l’aide d’un repère adapté, montrer que l’équation de la courbe précédente est l’équation de la trajectoire d’un point fixe sur la roue :

Le repère étant centré en O, écrire les coordonnées d’un point M de C, noter I le point de contact et t l’angle ($\overrightarrow{JM}$,$\overrightarrow{JI}$), où A(1 ;0) et J le centre du cercle : le roulement sans glissement se traduit par la condition : longueur de l’arc AI = longueur de l’arc IM.

Solution 3 *Cycloïde*

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1\text{-} \cos t \end{array} \right.$$

On a facilement la période de y : 2π
x n’est pas périodique mais $x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi$
Ainsi, on peut étudier la courbe sur $[0, 2\pi]$ et faire des translations de vecteurs $2\pi k \overrightarrow{i}$

Les dérivées :

$$x'(t) = 1 - \cos t$$
$$y'(t) = \sin t$$

sur $[0,\pi]$, $y(t)$ est croissante ; x(t) est croissante
La courbe :

Interprétation mécanique : Considérons une circonférence qui roule sans glissement sur un axe : prenons par exemple une roue de centre I et de rayon 1 roule sans glisser sur un axe horizontal ; à l'instant 0, la roue a pour point de contact un point O, origine du repère :
A l'instant t, le point de contact est le point I ; le centre de la circonférence est J
Ecrivons la condition de roulement sans glissement :
Il faut que $OI = ArcIM$:
Cherchons alors les coordonnées de M :
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JM}$
Notons t l'angle : $\widehat{(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JI})}$:
Alors $\widehat{(i, \overrightarrow{JM})} = -t - \dfrac{\pi}{2}$
$\overrightarrow{OA}(a;0), \overrightarrow{AJ}(0;1), \overrightarrow{JM}(\cos(-t-\dfrac{\pi}{2}); \sin(-t-\dfrac{\pi}{2}))$
$OI = ArcIM$: donc
$a = t$:

$$\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \sin t\overrightarrow{i} - \cos t\overrightarrow{j}$$

Donc le point M décrit la courbe :

$$\begin{cases} x(t) = t - sint \\ y(t) = 1\text{-}\cos t \end{cases}$$

Courbe

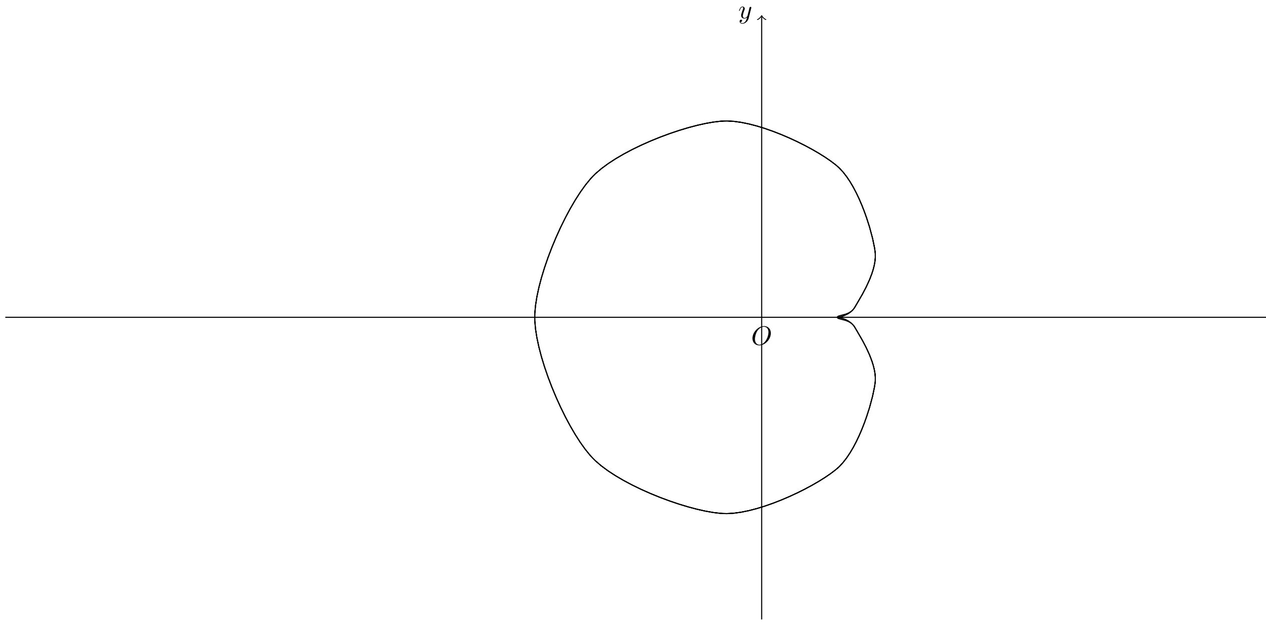
Exercice 4 *Etudier et construire la courbe paramétrée :*

$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin \text{t - sin 2t} \end{cases}$ c'est une épicycloïde : interprétation mécanique :
Soit cercle C_1de centre C, de rayon 1, roulant sans glisser sur un cercle fixe C_2 de centre 0, de rayon 1 : Le repère étant centré en O, écrire les coordonnées d'un point M de C_1, noter I le point de contact des deux cercles : le roulement sans glissement se traduit par la condition : longueur de l'arc AI = longueur de l'arc IM, où A(1 ;0).

Solution 4 *La courbe paramétrée :*

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t\text{-}\sin 2t \end{cases}$$

Etude :
$x\prime(t) = 2sint(2cost - 1)$; $y\prime(t) = 4(1 - cost)(cost + \frac{1}{2})$
On obtient comme points remarquables :
-En $t = 0$: A(1 ;0), $\overrightarrow{V_1}(0;0)$ point stationnaire, $\overrightarrow{V_2}(2;0)$ tangente horizontale.
-En $t = \frac{\pi}{3}$: B$(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$; $\overrightarrow{V_1}(0;2)$ tangente verticale ;
-En $t = \frac{2\pi}{3}$: C$(\frac{-1}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2})$,tangente horizontale.
-En $t = \pi$: D$(-3;0)$,tangente verticale.



La courbe :

Exercice 5 *La courbe paramétrée :*
$x(t) = \cos 2t;\ \ y(t) = \cos t - \sin t$:

Solution 5 *Pente de la tangente en A de paramètre $t = 0$, à la courbe paramétrée :* $x(t) = \cos 2t;\ \ y(t) = \cos t - \sin t$:

Comme $x'(t) = -2\sin 2t,\ y'(t) = -\cos t - \sin t$
En A : la pente de la tangente est infinie
x et y sont 2π périodiques ; y n'est ni paire ni impaire :
Un intervalle d'étude pour cette courbe est donc $[0, 2\pi]$
Y-a-t'il des points stationnaires ?
$x'(t) = 0$ pour $t = \dfrac{k\pi}{2}$
Or pour $t = \dfrac{k\pi}{2}, y'(t) = -\cos t - \sin t \neq 0$
Il n'y a pas de point stationnaire

Exercice 6 *Soit la courbe paramétrée :*

$$\begin{cases} x(t) = t + \dfrac{1}{2t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

Etudier précisément les points particuliers et leur tangente
Etudier les branches infinies

Solution 6 *Soit la courbe paramétrée :*

$$\begin{cases} x(t) = t + \dfrac{1}{2t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

On fait l'étude sur $\mathbb{R}^*$
$x\prime(t) = \dfrac{1-t^3}{t^3}$: x' a le signe de $t(1-t)$: x' est positif sur $]0;1]$
$y'(t) = \dfrac{-1+t^3}{t^2}$: y' positif pour $t \geq 1$
Les points particuliers et leur tangente sont :
$t = 1$:Le point est en A$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$
C'est un point stationnaire
La pente de la tangente est $\lim_{t\to 1}(\frac{y'}{x'}) = -1$
Type de rebroussement :
On peut voir que $\overrightarrow{V_2(0)}$ est non nul : on a un point de rebroussement de première espèce.
Les branches infinies :
Quand t tend vers 0 :

$$x(t) = t + \frac{1}{2t^2} = \frac{2t^3+1}{2t^2}$$
$$y(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t} = \frac{t^3+2}{2t}$$

Ainsi : x et y tendent vers $+\infty$,on a :
x$\sim \dfrac{1}{2t^2}$;y$\sim \dfrac{1}{t}$: donc il y a une branche parabolique (Ox) puisque $\dfrac{y}{x}$ tend vers 0
Quand t tend vers $+\infty$:
x$\sim t$;y$\sim \dfrac{t^2}{2}$:
donc il y a une branche parabolique (Oy) puisque $\dfrac{y}{x}$ tend vers $+\infty$
De même t tend vers -∞
$(t + \dfrac{1}{2t^2}, \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{t})$

Exercice 7 *Etudier et construire la courbe paramétrée suivante :*

$$\begin{cases} x(t) = (t^2+1)\exp(-\frac{t^2}{2}) \\ y(t) = t\exp(-\frac{t^2}{2}) \end{cases}$$

on mettra en évidence les points remarquables.

Solution 7 *La courbe paramétrée*

$$\begin{cases} x(t) = (t^2+1)\exp(-\frac{t^2}{2}) \\ y(t) = t\exp(-\frac{t^2}{2}) \end{cases}$$

x est paire, y est impaire : étude sur $[0;+\infty[$et symétrie (Ox)
$x\prime(t) = [2t - t(t^2+1)]\exp(-\frac{t^2}{2}) = t(-t^2+1)\exp(-\frac{t^2}{2})$
$y\prime(t) = (-t^2+1)\exp(-\frac{t^2}{2})$

Tableau de variations :

t	0 1	$+\infty$
x'(t)	0 +0	-
x	1$\nearrow x_0$	$\searrow 0$
y'(t)	1+0	-
y	0$\nearrow y_0$	$\searrow 0$

Points particuliers : $t=0$: en A(1 ;0), tangente dirigée par $\overrightarrow{V_1}(0;1)$
Point stationnaire : en $t=1$:en calculant x" et y", on obtient : $x"(1)=-2e^{\frac{-1}{2}}=y"(1)$: la tangente en $B(x_0,y_0)$ est de pente 1 ; $x_0 \simeq 1.2$, $y_0 \simeq 0.6$
Quand t tend vers $+\infty$, il y a un point asymptote : le point 0. La tangente est de pente $\lim_{t\to+\infty}(\frac{y'}{x'})=0$.

Courbe :

Exercice 8 *Etudier et construire la courbe paramétrée suivante : (strophoïde)*

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=t\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

1.2 courbes polaires

Exercice 9 *Reconnaître et étudier les courbes polaires : (a et θ_0 sont réels donnés)*

$$r=a;r=\theta_0;r=\frac{5}{\cos\theta};r=-\frac{1}{\sin(\theta-\theta_0)};r\cos(\theta-\theta_0)=a;r=a\cos(\theta-\theta_0)$$

Exercice 10 *Etudier et construire la courbe polaire :*
$r=3\cos 2\theta$,*a étant un réel positif.*

Exercice 11 *Etudier la courbe polaire : $r=4\sin\theta$; tracer la courbe en précisant :*

- Un intervalle d'étude et les symétries associées ;
- Les tangentes aux points remarquables.

Solution 8 *La courbe polaire :*

$r=a\cos 2\theta$, a étant un réel positif.
Comme $r(\theta+\pi)=r(\theta)$,il suffit d'étudier la courbe sur un intervalle de longueur π et de faire une symétrie O.
Comme r(θ) est paire, il suffit de l'étudier sur $[0, \frac{\pi}{2}]$;
On fera une symétrie (Ox)
Alors : $r\prime=-2a\sin 2\theta$

On a le tableau :

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
signe r	+	0	-
r'		-	
tanv	-∞		-∞

Points particuliers :
En $\theta=0$: $r=a$; $v=\frac{\pi}{2}$: la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur (Ox) ;
En $\theta=\frac{\pi}{4}$: r=0
Le point est au pôle
$\frac{r}{r'}=0$
Donc $\tan v=0$: la tangente est confondue avec le rayon vecteur : angle $\frac{\pi}{4}$
La tangente est confondue avec la bissectrice du repère.
En $\theta=\frac{\pi}{2}, r=-a$
$v=\frac{\pi}{2}$:la tangente est confondue au rayon vecteur horizontale

Courbe :
On la trace pour a=1 par exemple :
Un magnifique trèfle à 4 feuilles, une fois les symétries faites !

Exercice 12 *Etudier et construire la courbe polaire (spirale logarithmique)*

$$r = e^{\theta}$$

Exercice 13 *Calculer la longueur de la courbe* $y = chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in [-a, a]$, *a réel positif donné.*

Exercice 14 *Le sillon d'un disque peut être modélisé par une spirale d'Archimède d'équation polaire :* $r = a\frac{\theta}{2\pi}$

a représente la largeur du sillon ; (en effet, quand θ augmente de 2π, l'épaisseur de la "bobine" augmente de $a\frac{\theta+2\pi}{2\pi} - a\frac{\theta}{2\pi} = a$)

Le disque est gravé entre les distances au centre R et R' : calculer la longueur de sillon gravé.

Application numérique : $R = 2\text{cm}$, $R\prime = 5\text{cm}$, $a = 0,001\text{cm}$

Exercice 15 *Calculer l'aire du secteur plan déterminé par une cardioïde* $r = 1 + cos\theta$, *courbe que l'on étudiera d'abord.*

Exercice 16 *Calculer l'aire du secteur plan déterminé par le trèfle à trois pétales :* $r = 3cos3\theta$,*courbe que l'on étudiera d'abord.*