

Solutions des exercices calcul vectoriel

11 février 2014

Solution 1 Soient $\vec{u}(1, 2, -3)$ et $\vec{v}(2, 1, 5)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires
car les coordonnées ne sont pas proportionnelles.
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux
car leur produit scalaire est non nul et vaut -11 .
3. On calcule $\cos(\vec{u}, \vec{v})$
par la formule du cours et on obtient un angle de $61\pi/90$.

Solution 2 On considère un triangle ABC avec $A(2, -1, 1)$, $B(1, -3, -5)$ et $C(3, -4, -4)$.

1. Les longueurs des cotés du triangle ABC sont :
 $AB=\sqrt{41}$; $AC=\sqrt{35}$; $BC=\sqrt{6}$;
2. Le triangle est rectangle en C d'après le théorème de Pythagore.
Puis on calcule $\cos\hat{A} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{41}}$
le cosinus des angles du triangle ABC .

Solution 3 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Calcul de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pour les vecteurs suivants.

1. $\vec{u}(1, -1, 1)$ et $\vec{v}(-2, 3, 1)$.
On trouve $\vec{u} \wedge \vec{v}(-4, -3, 1)$
2. $\vec{u}(-1, 1, 2)$ et $\vec{v}(1, 0, -1)$.
On trouve $\vec{u} \wedge \vec{v}(-1, 1, -1)$
3. $\vec{u}(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 1)$ et $\vec{v}(\cos(\beta), \sin(\beta), 1)$
On trouve $\vec{u} \wedge \vec{v}(\sin(\alpha) - \sin(\beta), \cos(\beta) - \cos(\alpha), \sin(\alpha - \beta))$

Solution 4 Soient a, b, c et d quatre nombres réels.

On considère les vecteurs

$\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(c, d)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires est le déterminant $ad - bc$ est nul.

0.1 Plans et droites

Solution 5 On considère le point $A(1, -2, 4)$ et les vecteurs $\vec{u}(0, 2, -1)$ et $\vec{v}(1, 3, 1)$.

1. Un plan dans l'espace possède plusieurs types d'équations :
équation cartésienne, représentation paramétrique.
2. Le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est bien défini car $\vec{u} \wedge \vec{v}(5, -1, -2)$
3. Une représentation paramétrique du plan qui passe par A et qui est dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est :

$$\begin{cases} x &= & 1 + s \\ y &= -2 + 2t + 3s \\ z &= 4 - t + s \end{cases}$$

4. Une équation cartésienne du plan qui passe par
 A et qui est dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

s'obtient par le calcul d'un vecteur normal :

$$\vec{u} \wedge \vec{v}(5, -1, -2)$$

Comme le plan passe par A , on obtient une équation cartésienne :

$$5x - y - 2z + 1 = 0$$

Solution 6 On considère les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 1)$.

1. Le plan passant par A, B et C est bien défini car $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(1, 1, 1)$
2. Une représentation paramétrique du plan qui
passe par A, B et C est :

$$x = 1 - r - t, y = r, z = s \quad r \text{ et } s \text{ étant les 2 paramètres.}$$

3. Une équation cartésienne du plan qui passe par A, B et C s'obtient par le calcul d'un vecteur normal :

$$\vec{n}(1, 1, 1)$$

Et donc une équation cartésienne est :

$$x + y + z = 1 \text{ car } A \text{ appartient au plan.}$$

Ou bien, on peut remarquer que les 3 points vérifient la condition :

$$x + y + z = 1$$

et le plan est bien défini par ces 3 points...

Solution 7 Une représentation paramétrique du plan vectoriel qui a pour équation cartésienne $2x + y + z = 0$ est :

$$\begin{cases} x &= & x \\ y &= & y \\ z &= -2x - y \end{cases}$$

On a choisi ici les paramètres x et y .

On peut avoir facilement 2 vecteurs directeurs du plan :

$$\vec{u}(1, 0, -2), \text{ et } \vec{v}(0, 1, -1)$$

Solution 8 On considère les points $A(-1, 2, 3)$ et $B(0, 1, -2)$ et le vecteur $\vec{u}(1, 2, 1)$.

1. Une droite dans l'espace possède plusieurs types d'équations, une représentation paramétrique et des équations cartésiennes.
2. Une représentation paramétrique de la droite qui passe par A et qui est dirigée par le vecteur $\vec{u}$ est :

$$\begin{cases} x &= -1 + t \\ y &= 2 + 2t \\ z &= 3 + t \end{cases}$$

3. Une représentation paramétrique de la droite qui passe par les points A et B est :

$$\begin{cases} x &= -1 + t \\ y &= 2 - t \\ z &= 3 - 5t \end{cases}$$

On a facilement $\vec{AB}(1, -1, 5)$

Solution 9 Pour déterminer une représentation paramétrique de la droite vectorielle définie par le système d'équations

$$\begin{cases} x + 2y - 4z &= 0 \\ x + 3y - 7z &= 0. \end{cases}$$

on résout le système par exemple, x et y en fonction de z :

Alors :

$$\begin{cases} x &= 2z \\ y &= 3z \\ z &= z \end{cases}$$

Solution 10 Soient (D_1) , (D_2) et (D_3) trois droites qui sont définies par les systèmes d'équations respectifs

$$\begin{cases} x + y + z &= 2(1) \\ x - y + z &= 0.(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y &= 3(3) \\ x + z &= 1.(4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z &= 3(5) \\ x - 2y &= 1.(6) \end{cases}$$

1. Pour démontrer que (D_1) et (D_2) sont parallèles et non confondues, on peut soit chercher un vecteur directeur de chaque droite par exemple en cherchant une représentation paramétrique ; on choisit par exemple z comme paramètre.

On peut aussi ajouter les équations (1) et (2) et voir que les droites (D_1) et (D_2) sont aussi données par :

(D_1) :

$$\begin{cases} x + z &= 1(1) \\ y &= 1.(2) \end{cases}$$

$(D_2) :$

$$\begin{cases} x + z = 1(1) \\ y = 3.(2) \end{cases}$$

2. (D_2) et (D_3) ne se coupent pas car en cherchant les coordonnées d'un point d'intersection, on arrive une impossibilité.
3. (D_1) et (D_3) sont sécantes en un point $M(3, 1, -2)$ que l'on obtient en cherchant les coordonnées d'un point d'intersection.

Solution 11 Soit (P) le plan vectoriel d'équation $2x - y + z = 0$ et soit (D) la droite dirigée par $\vec{u}(1, 3, 1)$.

1. La droite (D) n'est pas parallèle à (P) car $\vec{u}(1, 3, 1)$ vecteur directeur de (D) ne vérifie pas l'équation cartésienne de (P) .
2. La droite (D) n'est pas orthogonale à (P) car un vecteur normal à (P) est $\vec{n}(2, -1, 1)$ non colinéaire à $\vec{u}(1, 3, 1)$.
3. La droite dirigée par le vecteur $\vec{v}(-2, 1, -1)$ est orthogonale à (P) car $\vec{v}(-2, 1, -1)$ est égal à $\vec{n}(2, -1, 1)$.

Solution 12 On considère le plan (P) défini par le point $A(1, 1, 0)$ et les vecteurs $\vec{u}(1, 0, 1)$ et $\vec{v}(0, 1, 1)$.

1. Pour savoir si le plan (P) passe par l'origine, on a plusieurs possibilités :
On peut chercher une équation cartésienne du plan :
On obtient :
 $x + y - z = 2$;
Et donc le plan (P) ne passe pas par l'origine.
2. Soit (D) la droite passant par l'origine et orthogonale à (P) a pour vecteur directeur $\vec{u} \wedge \vec{v}(1, 1, -1)$.