

correction du devoir 1

¹ la caractéristique d'une rédaction mathématique est la rigueur. L'intuition est du domaine de la recherche (j'ai idée que la solution est ...) ; la démonstration sert à prouver une supposition par la logique des propositions s'entraînant l'une l'autre. Une affirmation non justifiée n'a pas de valeur scientifique. La rédaction repose sur le langage mathématique avec ses symboles ($\exists, \forall$) (il existe, quel que soit) et sur les conjonctions : **alors**, **donc**, **implique** ($\Rightarrow$) qui à une cause énoncée associent une conséquence et **or** qui "appelle" une cause.

Dans l'exercice 1) il s'agit de prouver qu'une proposition entraîne une autre : $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$; on part donc de ce qu'on veut prouver $\mathcal{Q}$. Or l'analyse de cette proposition donne $\mathcal{Q} \Leftrightarrow (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{S})$. où $\mathcal{R}$ est la proposition $x \in A$ et $\mathcal{S}$ est la proposition $x \in B^c$. On part donc naturellement d'un $x \in A$ et en utilisant l'hypothèse $A \cap B = \emptyset$, on cherche à prouver que $x \in B^c$. A chaque étape on analyse la signification des propositions et objets intervenants (B^c , $A \cap B = \emptyset$...)

L'exercice 2 demande de vérifier l'égalité de deux ensembles ce qui se traduit par la double inclusion.

Exercice 1

1. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$

Si $A \cap B = \emptyset$: cette hypothèse signifie : $\nexists x, x \in A \text{ et } x \in B$ donc si $x \in A \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \in B^c$.

La proposition $\forall x \in A \Rightarrow x \in B^c$ entraîne que $A \subset B^c$.

Inversement si on suppose que $A \subset B^c$ alors si $x \in A \cap B \Rightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \Rightarrow (x \in B^c \text{ et } x \in B)$ ce qui est impossible, donc $(\nexists x, x \in A \text{ et } x \in B) \Leftrightarrow (A \cap B = \emptyset)$.

2. *Remarque : l'énoncé disait : en déduire. Une démonstration directe contient sous une forme ou l'autre la démonstration de 1)*

$$A \neq C \Leftrightarrow (A \setminus C \neq \emptyset \text{ ou } C \setminus A \neq \emptyset)$$

La contraposée de cette proposition est : $A = C \Leftrightarrow (A \setminus C = \emptyset \text{ et } C \setminus A = \emptyset)$

$$A \setminus C = A \cap C^c = \emptyset \Leftrightarrow (\text{d'après 1}) A \subset (C^c)^c = C \text{ et } C \setminus A = \emptyset \Leftrightarrow (\text{d'après 1}) C \subset (A^c)^c = A$$

$$\text{donc } (A \setminus C = \emptyset \text{ et } C \setminus A = \emptyset) \Leftrightarrow (A \subset C \text{ et } C \subset A) \Leftrightarrow A = C$$

Exercice 2

1. $(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$

$(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } y \in B$ donc $(x, y) \notin A \times B \Leftrightarrow x \notin A$ c'est à dire $x \in A^c$, ou $y \in B^c$

et comme $x \in A^c \Leftrightarrow x \in A^c$ et $y \in Y$ car la condition $y \in Y$ est toujours vraie (Y est l'espace "univers" de y), on obtient donc : $(x, y) \in (A \times B)^c \Leftrightarrow (x \in A^c \text{ ou } y \in B^c) \Leftrightarrow ((x, y) \in A^c \times Y \text{ ou } (x, y) \in X \times B^c) \Leftrightarrow (x, y) \in (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$ d'où l'égalité des deux ensembles.

2. On en déduit : $(A \times Y)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times Y^c)$; or $Y^c = \emptyset \Rightarrow X \times Y^c = \emptyset$ donc : $(A \times Y)^c = (A^c \times Y)$
idem : $(X \times B)^c = (X^c \times Y) \cup (X \times B^c) = \emptyset \cup (X \times B^c) = X \times B^c$

¹M.Richardot

Problème

A et B étant donnés dans E , on cherche l'existence d'ensembles X vérifiant l'équation : (1) $X \cup A = B$

Condition nécessaire d'existence de solution :

Si X existe tel que $X \cup A = B$, comme $\forall A, A \subset X \cup A \Rightarrow A \subset B$. (cette dernière condition est nécessaire puisque si non remplie entraîne qu'il n'existe pas de solution à (1))

Cette condition est suffisante (à l'existence de solution), en effet $A \subset B \Rightarrow B \cup A = B$ donc $X = B$ est solution.

il n'y a pas unicité des solutions : en effet $X = B \setminus A$ est aussi une solution distincte de B car dans les données du problème A est supposé non-vide.

dans les conditions où $A \subset B$ on peut rechercher toutes les solutions, en procédant toujours par condition nécessaire et suffisante. l'hypothèse d'existence de X vérifiant (1) va permettre de décrire des propriétés que doit vérifier X (condition nécessaire) puis on essaye de montrer que un X vérifiant ces conditions est bien solution de (1) (Les conditions sont suffisantes)

$X \cup A = B \Rightarrow X \subset B$ et $(X \cup A) \cap A^c = (X \cap A^c) \cup (A \cap A^c) = X \cap A^c = B \cap A^c$; mais comme $X \cap A^c \subset X \Rightarrow B \cap A^c = B \setminus A \subset X$

On a donc si X est une solution : $B \setminus A \subset X \subset B$.

Vérifions que ces conditions sont suffisantes pour définir un X solution. Si $B \setminus A \subset X \subset B \Rightarrow (B \setminus A) \cup A \subset X \cup A \subset B \cup A$, or $A \subset B \Rightarrow (B \setminus A) \cup A = B$ et $B \cup A = B$ donc $B \subset X \cup A \subset B$; on a bien $X \cup A = B$

Conclusion: l'ensemble des solutions de (1) est $\{X \subset E / B \setminus A \subset X \subset B\}$.

Solution de (2) : $X \cap A = B$

pour résoudre ceci, on peut redevelopper une démonstration semblable à la précédente mais remarquons que le complémentaire transforme une intersection en réunion ; $X \cap A = B \Leftrightarrow (X \cap A)^c = B^c \Leftrightarrow X^c \cup A^c = B^c$

Résoudre (2) revient à résoudre (1)': $Y \cup A' = B'$ avec $Y = X^c, A' = A^c$ et $B' = B^c$

Condition nécessaire pour avoir des solutions : $A' \subset B'$ soit $A^c \subset B^c \Leftrightarrow B \subset A$. La condition est suffisante, avec $Y = B'$ comme solution possible soit $X = B$. Les solutions sont alors : $\{Y / (B' \setminus A') \subset Y \subset B'\}$ or $B' \setminus A' = B^c \cap A \subset Y = X^c \subset B' = B^c \Leftrightarrow B \subset X \subset B \cup A^c$

On en déduit que si B est strictement inclus dans $B \cup A^c$ c'est à dire si $A^c \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq X$ alors il n'y a pas unicité de la solution.

La condition nécessaire pour que X soit solution de (1) et (2) est : $A \subset B$ et $B \subset A \Rightarrow A = B$; On a alors (1) $X \cup A = A \Rightarrow A \subset X$ et (2) $X \cap A = A \Rightarrow A \subset X$ donc $X = A$.