TD1 matrices carrées d'ordre 2

11 février 2014

1 Exercices

Exercice 1.1 *Soit la suite telle que :* $U_0 = U_1 = 1; U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$ *Soit la matrice* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, V_n = \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix}, V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$V_{n+1} = MV_n$$

Calculer à l'aide de V_0, V_1, V_2*... les puissances successives de la matrice* M^2, M^3, M^4 *sans utiliser la technique de multiplication de matrices, puis, vérifier par cette méthode le calcul ; on utilisera* $V_2 = M^2V_0, V_3 = M^2V_1$

Exercice 1.2 *Soit une matrice quelconque* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On définit la trace *de la matrice le réel :* $tr(A) = a + d$ *(somme des éléments de la diagonale), et le* déterminant *de la matrice le réel* $det(A) = ad - bc$ *: montrer que l'on a la relation :*

$$A^2 - tr(A)A + det(A)I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier cette relation sur la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$*, sur la matrice* $A\prime = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$...

Exercice 1.3 *Une méthode efficace de calcul de puissance de matrice...objectif : connaître l'évolution de la fameuse population* U_n *de lapins...*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *dont on se propose de calculer les puissances :*

1) Ecrire la relation $A^2 - tr(A)A + det(A)I$ *pour cette matrice ;*

2) On note P(X) le polynôme $P(X) = X^2 - X - 1$ *: résoudre* $P(X) = 0$.

La division euclidienne de X^n *par* $P(X)$ *donne la relation* $X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X)$ *:*

Quel est le degré de $R_n(X)$ *? On note* $R_n(X) = a_nX + b_n$ *:Calculer alors* $R_n(X)$ *en utilisant les solutions* φ *et* φ' *de* $P(X) = 0$*, sans calculer* $Q_n(X)$ *;*

3) Montrer que $A^n = a_nA + b_nI$

4) Expliciter alors A^n *: le problème des puissances de A est résolu...du même coup :*

5) Montrer que $U_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1}$*. Quelle est la limite du rapport* $\frac{U_{n+1}}{U_n}$*?*

Exercice 1.4 *Pour tout réel* θ*, on pose la matrice* $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$:

1) Montrer que $M(\theta+\theta') = M(\theta)M(\theta')$*, pour tous réels* θ, θ'.

2) Quelle est la matrice $M(0)$?

3) Montrer que $M(\theta)$ *est une matrice inversible, quelle est* $(M(\theta))^{-1}$?

4) Calculer $(M(\theta))^2$*, montrer que* $(M(\theta))^2 = M(2\theta)$*, puis par récurrence que* $(M(\theta))^n = M(n\theta)$

5) On pose $V = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ *: calculer le produit* $M(\theta)V$*; interpréter géométriquement.*

6) On pose $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$*, pour* a *et* b *réels quelconques :*

Montrer que l'on peut toujours trouver un réel $k > 0$ *et* θ *tels que* $A = kM(\theta)$

Application : calculer A^n *pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$*; vérifier en calculant directement* A^2, A^3.

2 Solutions exercices matrices ordre 2

Solution 2.1 *$V_2 = MV_1 = M^2V_0$; on pose $M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on identifie et on trouve facilement avec*

$V_2 = M^2V_0$ et $V_3 = M^2V_1$

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; de même $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Solution 2.2 *$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*

Calcul facile

Solution 2.3 *1) On a la relation $A^2 - A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*

2) Le polynöme $P(X) = X^2 - X - 1$ a pour solutions $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \varphi'$

La division euclidienne de X^n par $P(X)$ donne la relation $X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X)$: le degré de $R_n(X)$ est 0 ou 1 : on peut poser $R_n(X) = a_nX + b_n$

En remplaçant X par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, on trouve : $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n = a_n\frac{1+\sqrt{5}}{2} + b_n = a_n\varphi + b_n$

et $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n = a_n\varphi' + b_n$:

D'où $a_n = \dfrac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'}$, et $b_n = \dfrac{\varphi\varphi'^n - \varphi'\varphi^n}{\varphi - \varphi'}$

3) On a $A^n = a_nA + b_nI$ car $P(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

4) Ainsi, on a $A^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ a_n & a_n + b_n \end{pmatrix}$

5) La population de lapins le mois n est U_n ; elle équivaut à $\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1}$ quand n tend vers l'infini, car :

$V_n = \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix} = A^nV_0 = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ a_n & a_n + b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc : $U_n = a_n + b_n$:

Comme $|\varphi'| < 1, \lim \varphi'^n = 0$:

On alors $U_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1}$, et surtout, le rapport $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ tend vers $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or.

Solution 2.4 *1) On utilise les relations d'addition $sin(a+b)$ et $cos(a+b)$ 2) La matrice $M(0)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$*

3) $M(\theta)$ est une matrice inversible car son déterminant vaut 1; on peut alors calculer l'inverse par application de la formule du cours, ou plus rapidement :

comme $M(\theta).M(-\theta) = M(0) = I$:

$M(\theta)$ est une matrice inversible et

$(M(\theta))^{-1} = M(-\theta)$.

4) $(M(\theta))^2 = M(\theta+\theta) = M(2\theta)$; la récurrence est facile en utilisant la question 1).

5) Le produit $M(\theta)V$ est égal à $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$

Ainsi, on comprend pourquoi M est la matrice d'une rotation vectorielle d'angle θ.

6) $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = kM(\theta)$ si, par identification, $a = kcos\theta$ et $b = ksin\theta$: on obtient $k = \sqrt{a^2+b^2}$ et θ à l'aide de $tan\theta = \frac{b}{a}$, si a est non nul ; si a est nul, on a $\theta = \frac{\pi}{2}$

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, on a $A = 2M(\frac{\pi}{3})$ donc $A^n = 2^n M(n\frac{\pi}{3})$...