Université de Provence | 2010-2011
Licence MI | 1ère année-S1

Mathématiques générales I

Partiel 2 corrigé

5 Novembre 2010

Durée : 2 heures | *Ni document ni calculette autorisés*

Exercice 1

Soient $\overrightarrow{U}(1,1,0)$, $\overrightarrow{V}(t,-1,\sqrt{2})$ et $\overrightarrow{W}(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$.

1. Sans calculs, montrer que $(\overrightarrow{U}\wedge 3\overrightarrow{V})\wedge(-2\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V})=\overrightarrow{0}$. (sur 1,5 point)

Réponse : $\overrightarrow{U}\wedge 3\overrightarrow{V}$ et $-2\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{U}$ et à $\overrightarrow{V}$, ils sont donc colinéaires. Le sinus de leur angle est alors nul, d'où leur produit vectoriel est nul.

2. Déterminer le sous-ensemble E des réels t tels que : $\|\overrightarrow{U}\|\cdot\|\overrightarrow{V}\|=2\sqrt{2}$. (sur 1 point)

Réponse : $\sqrt{2}\cdot\sqrt{t^2+3}=2\sqrt{2}$ donc $2(t^2+3)=8$ ce qui fait $2t^2=2$, $t^2=1$ et $t=1$ ou -1.

3. Déterminer le sous-ensemble F de E des t tels que : $\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}=\overrightarrow{W}$. (sur 1 point)

Réponse : On calcule $\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}(\sqrt{2},-\sqrt{2},-t-1)$. C'est égal à $\overrightarrow{W}$ si et seulement si $t=-1$

Dans la suite, on pose $t=-1$.

4. En déduire que $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ ne sont ni orthogonaux ni colinéaires. (sur 1 point)

Réponse : S'ils étaient orthogonaux, $\|\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}\|$ serait égal à $\|\overrightarrow{U}\|\cdot\|\overrightarrow{V}\|$, or ce n'est pas le cas d'après les résultats des questions 2 et 3. S'ils étaient colinéaires, $\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}$ serait nul.

5. Donner l'angle entre $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$. (sur 1 point)

Réponse : $\frac{3\pi}{4}$ (on le voit géométriquement, ou en utilisant $\frac{\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{V}}{\|\overrightarrow{U}\|\cdot\|\overrightarrow{V}\|}=\cos\theta$).

6. Calculer l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$. (sur 0,5 point)

Réponse : $\|\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}\|=2$.

7. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(-1,-1,1)$, de vecteur normal $\overrightarrow{W}$. Montrer que $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont deux vecteurs de $\mathcal{P}$ (on peut le faire sans calculs). (sur 0,5 point)

Réponse : D'après le résultat de la question 3, si $t=-1$ alors $\overrightarrow{W}=\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}$ c'est à dire $\overrightarrow{W}$ est orthogonal à $\overrightarrow{U}$ et à $\overrightarrow{V}$. Ces deux vecteurs appartiennent par conséquent à tout plan orthogonal à $\overrightarrow{W}$.

8. Donner une équation cartésienne et paramétrique de $\mathcal{P}$. (sur 2 points)

Réponse : $x-y=0$ et $\begin{cases} x=s \\ y=s \\ z=t \end{cases}$.

9. Calculer la distance du point $B(1,1,3)$ au plan $\mathcal{P}$. (sur 0,5 point)

Réponse : 0, $B\in\mathcal{P}$.

Exercice 2

Soit $(\mathcal{D})$ la droite qui passe par le point $A(1,-2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{U}(2,1)$.
Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$.
Soit h une similitude du plan de centre $I(x_I,y_I)$, d'angle θ et de rapport r.
On suppose $h(\overrightarrow{U})=\sqrt{2}\cdot\overrightarrow{AO}$, où $O(0,0)$ est l'origine du plan.

1. Montrer que $r=\sqrt{2}$ et $\theta=\frac{\pi}{2}$. (sur 2 points)

Réponse : $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{AO}$ ont même longueur, h multiplie donc les longueurs par $\sqrt{2}$. Comme $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont orthogonaux, h est la composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ avec une homothétie de rapport $\sqrt{2}$.

2. En déduire que $h(\mathcal{D}) \neq \mathcal{D}$, c'est à dire que l'image de la droite $(\mathcal{D})$ n'est pas elle-même. (sur 1 point)
Réponse : $h(\mathcal{D})$ est orthogonal à $\mathcal{D}$ ce n'est donc pas $\mathcal{D}$.

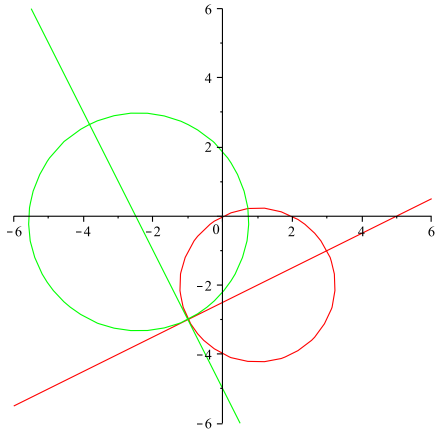
3. On suppose que le point I appartient au cercle $(\mathcal{C})$, à la droite $\mathcal{D}$, mais pas à la droite d'équation cartésienne $x + 3y = 0$. En déduire les coordonnées du point I. (sur 2 points)
Réponse : $(x_I - 1)^2 + (y_I + 2)^2 = 5$ et $\begin{cases} x_I = 1 + 2t \\ y_I = -2 + t \end{cases}$ donc $(2t)^2 + t^2 = 5$, ce qui fait $5t^2 = 5$ et $t = \pm 1$. On a donc deux intersections : $(x_I, y_I) = (-1, -3)$ ou $(3, -1)$. Comme d'après l'énoncé $x_I + 3y_I \neq 0$, les coordonnées de I sont $(-1, -3)$.

4. Donner explicitement $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sous la forme $h(z) = \alpha z + \beta$ où α et β sont deux nombres complexes qui seront précisés. (sur 1 point)
Réponse : Le point I ayant pour affixe $-1 - 3i$, on a

$$h(z) + 1 + 3i = i\sqrt{2} \cdot (z + 1 + 3i)$$

ce qui fait $h(z) = iz\sqrt{2} - (1 + 3\sqrt{2}) + i(\sqrt{2} - 3)$.

5. Déterminer l'image du cercle $(\mathcal{C})$ et l'image de la droite $\mathcal{D}$ par h (on ne demande pas les équations cartésiennes des images). (sur 1 point)
Réponse : h transforme $(\mathcal{C})$ en cercle de centre $h(1 - 2i) = -\sqrt{2} - 1 + i(2\sqrt{2} - 3)$ et de rayon $\sqrt{10}$. Il transforme la droite $(\mathcal{D})$ en droite orthogonale à $(\mathcal{D})$, passant par I.



Exercice 3

1. Montrer que le sous-ensemble du plan des points M d'affixe z, tels que :

$$\left| \frac{ze^{3i\pi/8}}{i} - \sqrt{2} \cdot e^{5i\pi/8} \right| = 4$$

est le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $I(-1, 1)$ et de rayon 4 (penser aux formes géométriques de $-1 + i$ et de i). (sur 1 point)
Réponse : À l'intérieur de la valeur absolue, on met $\dfrac{e^{3i\pi/8}}{i}$ en facteur, puis on l'enlève puisque sa valeur absolue (c'est à dire son module) vaut 1. On obtient

$$\left| z - i\sqrt{2} \cdot e^{2i\pi/8} \right| = 4.$$

Il s'agit bien du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $I(-1, 1)$ et de rayon 4 puisque $i\sqrt{2} \cdot e^{2i\pi/8} = i\sqrt{2} \cdot \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = -1 + i$.

2. Donner une équation cartésienne et une équation paramétrique de ce cercle. (sur 2 points)
Réponse : $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$ et $\begin{cases} x = -1 + 4\cos\theta \\ y = 1 + 4\sin\theta \end{cases}$.

3. Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par l'origine et le point I. Donner une équation cartésienne et polaire de $(\mathcal{D})$. (sur 2 points)
Réponse : $y = -x$ et $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

4. Déterminer les points d'intersection entre le cercle $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{D})$. (sur 1 point)

Réponse : Comme $(x+1)^2+(y-1)^2=16$ et $y=-x$, c'est $(x_1,y_1)=(-1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2})$ et $(x_2,y_2)=(-1+2\sqrt{2},1-2\sqrt{2})$.

5. Donner une équation paramétrique de la droite orthogonale à $(\mathcal{D})$, passant par le point I. (sur 1 point)

Réponse : $\left\{\begin{array}{l} x=-1+t \\ y=1+t \end{array}\right.$.