Université de Provence | 2010-2011
Licence MI | 1ère année-S1

Mathématiques générales I

Partiel 3 corrigé

3 Décembre 2010

Durée : 2 heures *Ni document ni calculette autorisés*

Exercice 1

Soit l'application f de $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{(x+2)(x-3)}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?

Réponse : Sur l'intervalle $]-2, 3[$ c'est le quotient d'un polynôme par un autre polynôme, qui ne s'annule pas sur cet intervalle, c'est donc une fonction continue en tout point de cet intervalle.

2. Calculer les limites de f en -2 et en 3.

Réponse : Pour cela il faut simplifier la fraction, et d'abord factoriser son numérateur :

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 4x - 4 &= x^2(x+1) - 4(x+1) \\ &= (x^2 - 4)(x+1) \\ &= (x-2)(x+2)(x+1). \end{aligned}$$

On peut donc simplifier par $x + 2$:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x-3}$$

et il en résulte que la limite de f est $-\frac{4}{5}$ quand x tend vers -2, $-\infty$ quand x tend vers 3 avec $x < 3$, et $+\infty$ quand x tend vers 3 avec $x > 3$.

3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en -2 et en 3 ?

Réponse : Elle l'est en -2 (en posant $f(-2) = -\frac{4}{5}$), mais pas en 3

Exercice 2

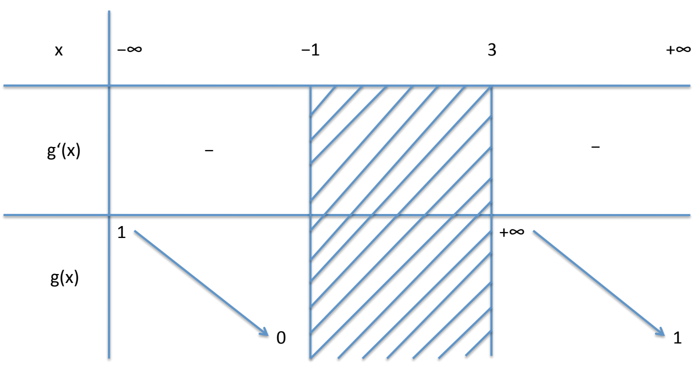
Soit g la fonction réelle définie par $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$.

1. Donner le domaine de définition D_g de g.

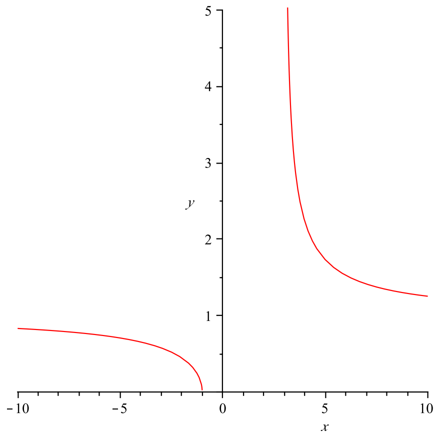
Réponse : $]-\infty, -1] \cup]3, +\infty[$.

2. Par un tableau de variations étudier la fonction g. Préciser ses limites.

Réponse : Comme $g'(x) = \frac{-\frac{4}{(x-3)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}}$ est négatif,



3. Représenter le graphe de la fonction.
Réponse :



4. Déterminer l'ensemble image.
Réponse : $\mathbb{R} - \{1\}$.

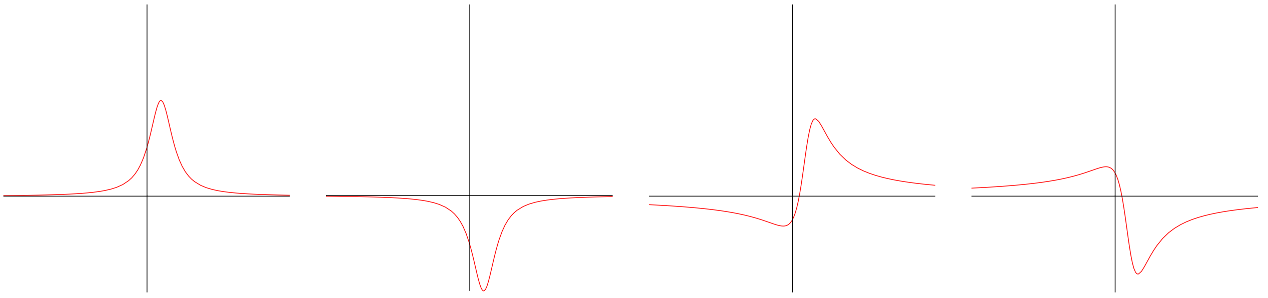
5. La fonction g est-elle injective sur D_g ? Est-elle surjective sur $\mathbb{R}$?
Réponse : Oui parce qu'elle envoie injectivement les deux intervalles $]-\infty, -1]$ et $]3, +\infty[$ sur deux intervalles disjoints.
Non parce qu'elle ne peut pas prendre la valeur 1 : si $g(x)$ était égal à 1 on aurait $x + 1 = x - 3$ donc $1 = -3$.

6. Soit la fonction $h :]3, +\infty[\to]1, +\infty[$ définie par $h(x) = g(x)$, $\forall x \in]3, +\infty[$. Montrer que h est bijective, puis donner sa réciproque.
Réponse : Elle est bijective parce qu'elle est strictement décroissante et parce que ses limites quand x tend vers 3 ou $+\infty$ sont respectivement $+\infty$ et 1, autrement dit elle envoie l'intervalle $]3, +\infty[$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
$y = h(x)$ équivaut à $x = \dfrac{3y^2 + 1}{y^2 - 1}$ donc $h^{-1}(y) = \dfrac{3y^2 + 1}{y^2 - 1}$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 0$ et $f(0) \neq 0$.

1. Illustrer sur un dessin une telle fonction.
Réponse : Quatre exemples de telles fonctions :



2. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que

$$x > A \Rightarrow |f(x)| \leq |f(0)|$$

Réponse : C'est parce que $f(x)$ a une limite nulle quand $x \to +\infty$.

3. Montrer qu'il existe $B < 0$ tel que

$$x < B \Rightarrow |f(x)| \leq |f(0)|$$

Réponse : C'est parce que $f(x)$ a une limite nulle quand $x \to -\infty$.

4. Montrer que sur $[A, B]$, il existe x_0 et x_1 tel que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0)$.
Réponse : C'est parce que f est continue sur l'intervalle $[A, B]$.

5. En déduire que f est bornée.
Réponse : Les valeurs de $f(x)$ quand x n'est pas dans l'intervalle $[A, B]$, appartiennent à l'intervalle $[-|f(0)|, |f(0)|]$ d'après ce qui est dit aux questions 2 et 3. En appelant M le plus grand élément parmi les trois réels $|f(0)|, |f(x_1)|$ et $|f(x_2)|$,
$f(x)$ appartient à l'intervalle $[-M, M]$ quel que soit x (dans $[A, B]$ ou non).

Exercice 4

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$\begin{cases} & u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \end{cases}$$

1. Soit $I = [0, +\infty[$. On introduit la fonction

$$f : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{6 + x} \end{array}$$

Vérifier que I est stable par f, $(f(I) \subset I)$.
Réponse : $f(x)$ étant positif il appartient toujours à $I = [0, +\infty[$.

2. Montrer que f est croissante, en déduire que (u_n) est décroissante.
Réponse : f est croissante parce que sa dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{6 + x}}$ est positive.
On calcule $u_1 = 4$ et on remarque que $u_1 \leq u_0$. Puis on démontre par récurrence que $u_{n+1} \leq u_n$: pour chaque entier n tel que $u_{n+1} \leq u_n$, en appliquant la fonction croissante f on obtient $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ c'est à dire $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

3. Démontrer que (u_n) est convergente.
Réponse : Parce que décroissante et minorée par 0.

4. Déterminer la limite de (u_n).
Réponse : $\ell = \sqrt{6 + \ell}$ donc $\ell^2 = 6 + \ell$ et $\ell = 3$ (la solution $\ell = -2$ ne convient pas puisque la limite d'une suite positive ne peut pas être strictement négative).

Exercice 5

Calculer la limite de la suite suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1 + 4 + 7 + ... + 3n - 2}{n + 1} + \frac{-6n^2 + n + 1}{2n}$$

Réponse : On calcule d'abord

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 7 + ... + 3n - 2 &= (1 + 3 \cdot 0) + (1 + 3 \cdot 1) + (1 + 3 \cdot 2) + \cdots + (1 + 3 \cdot (n - 1)) \\ &= (1 + 1 + 1 + \cdots + 1) + 3 \cdot (0 + 1 + 2 + \cdots + (n - 1)) \\ &= n + 3\frac{(n - 1)n}{2} \\ &= \frac{3n^2 - n}{2} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{3n^2 - n}{2(n + 1)} + \frac{-6n^2 + n + 1}{2n} \\ &= \frac{(3n^2 - n)n + (-6n^2 + n + 1)(n + 1)}{2n(n + 1)} \\ &= \frac{-3n^3 - 6n^2 + 2n + 1}{2n(n + 1)} \end{aligned}$$

La limite de u_n quand $n \to +\infty$ est donc $-\infty$ (mettre en facteur n^3 au numérateur et n^2 au dénominateur).

Fin du sujet