Chapitre 24

Solution des exercices du TD 7

Les méthodes ayant été détaillées dans le cours, certaines corrections seront complètement rédigées, d'autres non...

Solution de l'exercice 7.1

Résolution des systèmes d'équations suivants :

1) $\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ y-4z=-3 \\ -y+2z=2 \end{cases}$;on obtient la solution unique : $\{x=3, y=-1, z=\frac{1}{2}\}$

2) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+y-z=0 \\ x+2y+z=3 \end{cases}$;on obtient la solution unique : $\{x=2, y=-1, z=3\}$

3) $\begin{cases} x+y+z=m+1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+my+z=1 \end{cases}$, m étant un paramètre :

On pose la matrice augmentée :

$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ m & 1 & m-1 & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1; L_3 \leftarrow L_3 - L_1$; puis, $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1-m & -1 & -m^2 \\ 0 & m-1 & 0 & -m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1-m & -1 & -m^2 \\ 0 & 0 & -1 & -m-m^2 \end{pmatrix}$

Si $m=1$: les lignes 2 et 3 sont incompatibles : pas de solution ;

Sinon, le système est de rang 3 : on obtient la solution unique :

$$x=\frac{m^3-m^2-2m+1}{1-m}; y=\frac{m}{1-m}; z=m+m^2$$

4) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 5y + 3z = -1 \\ -2y - 10z = 14 \end{cases}$:

La matrice augmentée est :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -10 & 14 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ équivalente à : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

On voit aussi que M est équivalente à une matrice 2 lignes puisque la troisième, multiple de la deuxième, est inutile : elle est de rang 2.

Donc z est variable libre, x et y inconnues principales :

$$x = 11z + 17; y = -5z - 7$$

Solution de l'exercice 7.2

Pour résoudre le système d'équations :

1) $\begin{cases} 2x + 2y - z + 6t = 4 \\ 4x + 4y + z + 10t = 13 \\ 6x + 5y + 20t = 19 \end{cases}$

On pourra utiliser les transformations : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1; L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$; puis, échanger L_2 et L_3

Les pivots sont alors : $2, -1$ et 3;

Le rang est : 3 ; il y a une variable libre : t ;

Les solutions sont :

$x = -\dfrac{20}{3}t + \dfrac{29}{6}$; $y = 4t - 2; z = \dfrac{1}{3}(2t + 5)$

2) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4s + 2t = 2 \\ 3x - 7y + 2z - 5s + 4t = -3 \\ 5x - 10y - 5z - 4s + 7t = -20 \end{cases}$:

On pourra utiliser les transformations : $L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1; L_3 \leftarrow 2L_3 - 5L_1$; puis, $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$

Les pivots sont alors : $2; 1$ et 2 : $r = 3; x, y, s$ sont inconnues principales.

Les solutions sont : $x = 11z - 15t - 44$;$y = 5z - 8t - 22$; $s = 3t + 5$; z et t variables libres

3) $\begin{cases} x - 4y + 3z = 2 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 4x - 5y + 5z = 2 \\ 2x + 3y - z = a \end{cases}$; discuter selon la valeur de a, le rang et les solutions du système.

Le premier pivot est 1 ;

Sur la matrice augmentée on utilise les transformations : $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1; L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1; L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$:

On obient la matrice équivalente :

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & -7 & -6 \\ 0 & 11 & -7 & -6 \\ 0 & 11 & -7 & a-4 \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour que le système soit compatible, il faut que $a-4=-6$: $a=-2$:

Alors, le système équivaut à 2 lignes : il est de rang 2 ; x et y sont inconnues principales, z est libre :

On obtient :

$$x = \frac{-5}{11}z - \frac{2}{11}; y = \frac{7}{11}z - \frac{6}{11}$$

$$4) \begin{cases} x - 2y + 3z + t = a \\ -2x + 3y - 7z - t = 2 \\ y + a^2 z + at = -4 \end{cases}$$

La matrice augmentée est : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & a \\ -2 & 3 & -7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & a^2 & a & -4 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$

équivalente à :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2+2a \\ 0 & 1 & a^2 & a & -4 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 : M \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2+2a \\ 0 & 0 & a^2-1 & a+1 & 2a-2 \end{pmatrix} :$$

- Si $a=-1$: le système n'a pas de solution, on dit qu'il est incompatible, puisque la dernière équation est impossible.

- Si $a=1$: le rang est 3 ; z est variable libre ; la dernière ligne donne $t=0$; puis :

Les solutions sont : $x=-7-5z$; $y=-4-z, t=0$;z libre

- Sinon, le rang est 3 ; t est variable libre ; les solutions sont :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t(a+4)}{a-1} - \dfrac{14+7a+3a^2}{a+1} \\ y = \dfrac{ta}{a-1} - \dfrac{2(a^2+2a+2)}{a+1} \\ z = \dfrac{2}{a+1} - \dfrac{t}{a-1} \\ t = t \end{cases}$$

Systèmes homogènes

On rappelle le théorème :

Les solutions d'un système homogène $MX=0$ forment un espace vectoriel de dimension égal au nombre de variables libres ; si r est le rang du système, p le nombre d'inconnues, les solutions forment un espace vectoriel de dimension $p-r$; c'est le nombre de variables libres, les autres sont les r inconnues principales. On obtient une base de cet espace de solutions en posant par exemple successivement chaque variable libre égale à 1, et et les autres variables libres nulles.

Solution de l'exercice 7.3

Dans les cas suivants chercher le rang du système, les solutions, les inconnues principales, une base de cet espace de solutions :

1) $\left\{\begin{array}{c} x+3y-2z=0 \\ -2x+3y-7z=0 \\ -x+6y+z=0 \end{array}\right.$: On obtient la solution unique $x=0; y=0; z=0$

2) $\left\{\begin{array}{c} x+3y+2z-s=0 \\ -2x+y-7z+2s=0 \\ -3x+5y-12z+3s=0 \end{array}\right.$:

On obtient le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{c} x+3y+2z-s=0 \\ 7y-3z=0 \end{array}\right.$$

Le rang est 2 ; il y a $4-2=2$ inconnues principales x et y ; et 2 variables libres : z et s :

On obtient : $y=\dfrac{3z}{7}; x=\dfrac{-23z}{7}+s$

Une base de cet espace de solutions, de dimension 2 est : (u,v), $u(\dfrac{-23}{7}, \dfrac{3}{7}, 1, 0)$ et $v(1,0,0,1)$;

Pour l'obtenir, on peut prendre d'abord $z=1$ et $s=0$, puis, $s=1$ et $z=0$.

3) $\left\{\begin{array}{c} -x+y+2z-s+t=0 \\ -2x+y-z+s=0 \\ -4x+3y+3z-s+2t=0 \\ -3x+3y+z-s+t=0 \end{array}\right.$:

La matrice est, après avoir multiplié la ligne 1 par -1 pour que le premier pivot soit 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & -2 \end{pmatrix} :$$

La ligne 4 est inutile ; le rang est 3 ; donc il y a 2 variables libres et 3 inconnues principales ;

On obtient :

$$x=\frac{4}{5}s+\frac{1}{5}t;\ y=s;\ z=\frac{2}{5}s-\frac{2}{5}t$$

Une base de cet espace de solutions, de dimension 2 est $u(\dfrac{4}{5}, 1, \dfrac{2}{5}, 1, 0)$ et $v(\dfrac{1}{5}, 0, \dfrac{-2}{5}, 0, 1)$

Recherche de matrices inverses par méthode du pivot de Gauss (ou autre méthode) :

Solution de l'exercice 7.4

On trouve les matrices inverses des matrices données en résolvant le système $MX = X\prime$:

NB : on pourra voir une autre méthode dans le livre d'algèbre linéaire série Schaum déjà cité.

1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, inverse :$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{13}{8} & \frac{33}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -\frac{13}{16} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2) $N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, inverse :$N^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{5} & \frac{4}{5} & \frac{17}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{9}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{13}{5} & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} & \frac{7}{5} \\ -\frac{11}{5} & \frac{3}{5} & \frac{14}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$ ($\det N =$ 5)