Systèmes d'équations linéaires (exercices)

L1PC, semestre 2

1. Formules de Cramer et pivot de Gauss

Exercice 1 Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants par la méthode du pivot de Gauss:

$$(S_1)\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 3x+2y+4z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ x+2y+3z=1 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ y-4z=-3 \\ -y+2z=2 \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+y-z=0 \\ x+2y+z=3 \end{cases} \qquad (S_5)\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x+5y+3z=-1 \\ -2y-10z=14 \end{cases}$$

Exercice 2 Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants par la méthode du pivot de Gauss:

$$(S_1)\begin{cases} x+y-z+t=2 \\ 2x-2y+z-3t=1 \\ -x+y+z-2t=-2 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x+2y-z+6t=4 \\ 4x+4y+z+10t=13 \\ 6x+5y+20t=19 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+6t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=0 \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} 2x-5y+3z-4s+2t=2 \\ 3x-7y+2z-5s+4t=-3 \\ 5x-10y-5z-4s+7t=-20 \end{cases} \qquad (S_5)\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+x_4+x_5=1 \\ x_1+3x_2-x_3+3x_4+2x_5=3 \\ x_1+3x_2-x_3+3x_4+4x_5=4 \end{cases}$$

2. Systèmes avec paramètre

Exercice 3 Discuter et résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants par la méthode du pivot de Gauss:

$$(S_1)\begin{cases} x+y+z=m+1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+my+z=1 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x-4y+3z=2 \\ 3x-y+2z=0 \\ 4x-5y+5z=2 \\ 2x+3y-z=a \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} 2x+y-3z=a \\ 3x+2y+z=a+3 \\ 7x+4y-5z=2a+5 \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} 2x-y+z+t=1 \\ x+2y-z+4t=2 \\ x+7y-4z+11t=m \end{cases} \qquad (S_5)\begin{cases} x-2y+3z+t=a \\ -2x+3y-7z-t=2 \\ y+a^2z+at=-4 \end{cases}$$

3. Systèmes homogènes et sous-espaces vectoriels

Exercice 4 Dans les cas suivants l'ensemble des solutions est un espace vectoriel, trouver une base de cet espace et en déduire le rang de la matrice du système:

$$(S_1)\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ -2x+3y-7z=0 \\ -x+6y+z=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+3y+2z-s=0 \\ -2x+y-7z+2s=0 \\ -3x+5y-12z+3s=0 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} -x+y+2z-s+t=0 \\ -2x+y-z+s=0 \\ -4x+3y+3z-s+2t=0 \\ -3x+3y+z-s+t=0 \end{cases}$$

4. Inversion de matrices

Exercice 5 Pour chacune des deux matrices suivantes, résoudre $MX = Y$ en calculant les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ en fonction de celles de $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, puis en déduire l'inverse de la matrice M:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Erreurs d'arrondi

Exercice 6 a) Résoudre le système d'équations suivant par la méthode du pivot de Gauss sans permuter les lignes, puis par la méthode du pivot de Gauss en permutant les lignes:

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

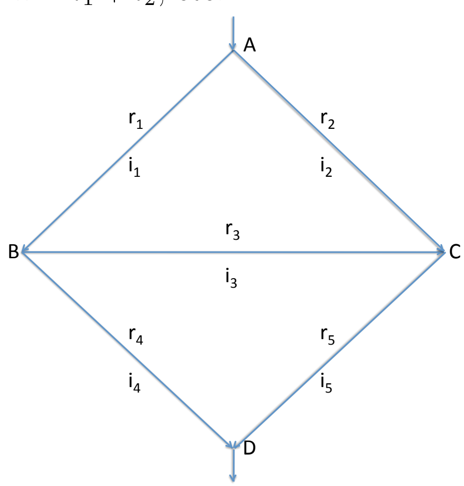
b) Supposons que a est voisin de 0 (par exemple $a = 10^{-12}$), de sorte qu'un logiciel de calcul remplace a par 0 avant de résoudre les équations. Comparer la solution trouvée à la première question et la solution donnée par le logiciel de calcul.

c) Mêmes questions pour le système d'équations

$$\begin{cases} x - (3-a)y = -1 \\ 2x - 6y = -3 \end{cases}$$

6. Pont de Wheatstone

Exercice 7 Un courant d'intensité 1 arrive en A, il se partage en i_1 et i_2 pour aller vers B et C: $1 = i_1 + i_2$, etc.



Les différences de potentiel sont données par les relations $u_k = r_k i_k$. Sur chaque circuit la somme des différences de potentiel est nulle, par exemple sur le circuit ABC on a $r_1 i_1 + r_3 i_3 - r_2 i_2 = 0$.

Question 1: Écrire les relations que doivent vérifier les intensités et les résistances du pont de Wheatstone sous la forme $AV = 0$, où A est une matrice à 6 lignes et 6 colonnes, V la matrice-colonne des intensités $i_1, \ldots, i_5, 1$ et 0 la matrice-colonne nulle.

Question 2: Que doivent vérifier les résistances r_k si i_3 est nul?