Université Aix-Marseille
UFR Sciences
Licence de physique et chimie
Semestre 2

UE Mathématiques 2
TD1
Equations différentielles

1 Linéarité

Exercice 1. *Parmi les équations différentielles suivantes, dire lesquelles sont linéaires*

$$y'(x) = y(x); \quad y'(x) = y(x) + x; \quad y'(x) = y(x) + \sin(x);$$
$$y'(x) = -xy(x); \quad y(x)y'(x) = 1; \quad y'(x) = \tan(y(x)).$$

2 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 2. *Résoudre les équations différentielles*

$$\begin{aligned} y'(x) + 5y(x) &= 0 \\ 2y'(x) - 3y(x) &= 0 \\ (1+x^2)y'(x) + 4xy(x) &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 3. *Résoudre les équations différentielles*

$$\begin{aligned} y'(x) + 2xy(x) &= \exp(x - x^2) \\ y'(x) + \frac{x}{x^2+1}y(x) - \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 4. *On considère l'équation*

$$(E) \quad y'(x) + \frac{3x}{x^2+1}y(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

1. *Déterminer l'intervalle de résolution de* (E).
2. *Résoudre* (E).
3. *Déterminer la solution de* (E) *qui vérifie la condition initiale*

$$y(0) = 2.$$

4. *Comment s'appelle le problème résolu dans la question précédente ?*

Exercice 5. *On considère l'équation*

$$(*) \quad xy'(x) - y(x) = x^2.$$

1. *Ecrire* $(*)$ *sous forme résolue c'est-à-dire sous la forme*

$$(E) \quad y'(x) + \alpha(x)y(x) = \beta(x).$$

2. *Déterminer les intervalles de résolution de* (E).
3. *Résoudre* (E) *sur chaque intervalle de résolution.*

Exercice 6. *Problème de physique*

On considère une cuve qui contient 50 *litres d'un liquide composé de* 90% *d'eau et* 10% *d'alcool. Un second liquide contenant* 50% *d'eau et* 50% *d'alcool est ajouté dans la cuve avec un débit de* 4 *litres par minute. En même temps que l'on ajoute le second liquide, un orifice permet l'évacuation de la cuve avec un débit de* 5 *litres par minute. On désigne par* t *le temps et par* $t \mapsto y(t)$ *la fonction qui représente le nombre de litres d'alcool dans la cuve. On démontre que la fonction* y *vérifie l'équation différentielle*

$$y'(t) + \frac{5}{50-t}y(t) = 2.$$

1. *Déterminer la condition initiale du problème.*
2. *Résoudre cette équation pour* $t \in [0; 50[$ *en tenant compte de la condition initiale.*

Exercice 7. *Problème de cinétique chimique*

Dans une réaction chimique, la concentration d'un réactif R, *notée* $[R]$, *évolue en fonction du temps. La vitesse volumique de disparition de* R, *notée* $v(t)$, *est définie par*

$$v(t) = -\frac{d[R]}{dt}.$$

On dit que la réaction est d'ordre 1 lorsque la vitesse volumique est proportionnelle à la concentration.

1. *Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la concentration* $[R]$.
2. *Résoudre cette équation pour* $t \in \mathbb{R}^+$.

3 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 8. *Résoudre les équations différentielles*

$$\begin{aligned} y''(x)+3y(x) &= 0\\ 3y''(x)+2y'(x)-y(x) &= 0\\ 4y''(x)+4y'(x)+y(x) &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 9. *Résoudre les équations différentielles*

$$\begin{aligned} y''(x)+y'(x)+y(x) &= 2x+1\\ y''(x)-3y'(x)+2y(x) &= 10\sin(x)\\ y''(x)+4y(x) &= \cos(2x). \end{aligned}$$

Exercice 10. *On considère l'équation*

$$(E) \quad y''(x)-4y'(x)+4y(x)=x\exp(2x).$$

1. *Résoudre* (E).
2. *Déterminer la solution de* (E) *qui vérifie les conditions initiales*

$$y(0)=1 \text{ et } y'(0)=4.$$

Exercice 11. *Oscillateur harmonique*

On désigne par oscillateur harmonique un système physique (électrique, mécanique, ...) dont le mouvement est décrit par une équation différentielle d'ordre 2 de la forme

$$(H) \quad y''(x)+2\alpha y'(x)+\omega_0^2 y(x)=0$$

où ω_0^2 *désigne une constante réelle strictement positive et* α *désigne une constante réelle positive. Si* $\alpha \neq 0$ *alors on dit que l'oscillateur est amorti.*

1. *On suppose que* $\alpha=0$.
   (a) *Résoudre l'équation* (H).
   (b) *Déterminer la solution de l'équation* (H) *qui vérifie les conditions initiales*

$$\left\{\begin{aligned} y(0) &= u_0\\ y'(0) &= v_0 \end{aligned}\right.$$

avec u_0 *et* v_0 *deux réels connus. On appelera* (I) *ce système.*

2. *On suppose que* $\alpha \neq 0$ *et* $\alpha < \omega_0$.

   (a) *Résoudre l'équation* (H). *On pourra poser* $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

   (b) *Déterminer la solution de l'équation* (H) *qui vérifie les conditions initiales définies par le système* (I).