

On se place dans un repère orthonormé direct de $\mathbb{R}^3$. L'unité de longueur est le cm.

1 Produit scalaire et produit vectoriel

Exercice 1. Soient $\vec{u}(1, 2, -3)$ et $\vec{v}(2, 1, 5)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?
3. Calculer $\cos(\vec{u}, \vec{v})$.
4. Déterminer une mesure en radians de l'angle non orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 2. On considère un triangle ABC avec $A(2, -1, 1)$, $B(1, -3, -5)$ et $C(3, -4, -4)$.

1. Déterminer les longueurs des côtés du triangle ABC .
2. Déterminer le cosinus des angles du triangle ABC .
3. Déterminer une mesure en radians des angles du triangle ABC .

Exercice 3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pour les vecteurs suivants.

1. $\vec{u}(1, -1, 1)$ et $\vec{v}(-2, 3, 1)$.
2. $\vec{u}(-1, 1, 2)$ et $\vec{v}(1, 0, -1)$.
3. $\vec{u}(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 1)$ et $\vec{v}(\cos(\beta), \sin(\beta), 1)$ où α et β désignent deux réels.

Exercice 4. Soient a, b, c et d quatre nombres réels. On considère les vecteurs $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(c, d)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Etablir une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Exercice 5. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Démontrer par deux méthodes différentes que

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2.$$

2 Plans et droites dans l'espace

Exercice 6. On considère le point $A(1, -2, 4)$ et les vecteurs $\vec{u}(0, 2, -1)$ et $\vec{v}(1, 3, 1)$.

1. Un plan dans l'espace possède-t-il plusieurs types d'équations ?
2. Le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est-il bien défini ?
3. Déterminer une représentation paramétrique du plan qui passe par A et qui est dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
4. Déterminer une équation cartésienne du plan qui passe par A et qui est dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par deux méthodes différentes.

Exercice 7. On considère les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 1)$.

1. Le plan passant par A, B et C est-il bien défini ?
2. Déterminer une représentation paramétrique du plan qui passe par A, B et C .
3. Déterminer une équation cartésienne du plan qui passe par A, B et C par deux méthodes différentes.

Exercice 8. Déterminer une représentation paramétrique du plan qui a pour équation cartésienne $2x + y + z - 2 = 0$.

Exercice 9. On considère les points $A(-1, 2, 3)$ et $B(0, 1, -2)$ et le vecteur $\vec{u}(1, 2, 1)$.

1. Une droite dans l'espace possède-t-elle plusieurs types d'équations ?
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite qui passe par A et qui est dirigée par le vecteur $\vec{u}$.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite qui passe par les points A et B .

Exercice 10. Déterminer un système de deux équations vérifiées par la droite qui passe par le point $A(1, 0, 1)$ et qui est dirigée par le vecteur $\vec{u}(2, -1, 1)$.

Exercice 11. Déterminer une représentation paramétrique de la droite définie par le système d'équations

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ x + 3y - 7z - 1 = 0. \end{cases}$$

Exercice 12. Soient (D_1) , (D_2) et (D_3) trois droites qui sont définies par les systèmes d'équations respectifs

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x + z = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

1. Démontrer que (D_1) et (D_2) sont parallèles et non confondues.
2. Démontrer que (D_2) et (D_3) ne se coupent pas.
3. Démontrer que (D_1) et (D_3) sont sécantes en un point et calculer les coordonnées de ce point.

Exercice 13. Soit (P) le plan d'équation $2x - y + z - 3 = 0$ et soit (D) une droite dirigée par $\vec{u}(1, 3, 1)$.

1. La droite (D) est-elle parallèle à (P) ?
2. La droite (D) est-elle orthogonale à (P) ?
3. Une droite dirigée par le vecteur $\vec{v}(-2, 1, -1)$ est-elle orthogonale à (P) ?
4. Démontrer que la droite passant par le point $A(1, 0, 1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{w}(0, 1, 1)$ est contenue dans (P) .
5. Le plan (P) contient-il une droite du plan (xOy) ?

Exercice 14. On considère le plan (P) défini par le point $A(1, 1, 0)$ et les vecteurs $\vec{u}(1, 0, 1)$ et $\vec{v}(0, 1, 1)$.

1. Le plan (P) passe-t-il par l'origine ?
2. Soit (D) la droite passant par l'origine et orthogonale à (P) . Déterminer un vecteur directeur de (D) .