Université Aix-Marseille
UFR Sciences
Licence de physique et chimie
Semestre 2

UE Mathématiques 2
TD4
Espaces vectoriels

1 Sous-espaces vectoriels

Exercice 1. *Soit E un espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E.*

1. *Rappeler la définition d'un sous-espace vectoriel.*
2. *Rappeler la définition de l'ensemble $U \cap V$.*
3. *Démontrer que $U \cap V$ est un sous-espace vectoriel.*

Exercice 2. *Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ définis ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$?*

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_2 = 0\} \\
E_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 = x_2 + x_3\} \\
E_3 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_2 \geqslant 0\} \\
E_4 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_3 x_4 = 0\} \\
E_5 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_2 = x_1^2\}.
\end{aligned}$$

2 Familles libres, familles génératrices et bases

Exercice 3. *On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$*

$$\vec{u}(1, 2, -1) \quad \vec{v}(1, 0, 1) \quad \vec{w}(-1, 2, -3).$$

1. *Déterminer si la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre ou liée. Dans le cas où la famille est liée, déterminer une relation liant les 3 vecteurs.*
2. *Même question avec les vecteurs*

$$\vec{u}(-1, 2, 5) \quad \vec{v}(2, 3, 4) \quad \vec{w}(7, 0, -7).$$

3. Même question avec les vecteurs

$$\vec{u}(1,3,-2) \quad \vec{v}(3,2,-6) \quad \vec{w}(\frac{3}{2},-\frac{11}{3},-3).$$

Exercice 4. *Déterminer si les familles de vecteurs suivantes sont libres ou liées*

$$\{(-1,0,2),(1,3,1),(0,1,-1)\}$$
$$\{(15,-27,-6,12),(-\frac{5}{2},\frac{9}{2},1,-2)\}$$
$$\{(-1,2,1,4),(0,3,-1,2),(-2,1,3,6)\}.$$

Exercice 5. *On considère les vecteurs de* $\mathbb{R}^2$

$$\vec{u}(2,1) \quad \vec{v}(-1,2) \quad \vec{w}(1,3).$$

1. *Démontrer que ces trois vecteurs forment une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$.
2. *Soit* $X(x_1,x_2)$ *un vecteur de* $\mathbb{R}^2$.
   (a) *Exprimer* X *comme combinaison linéaire des vecteurs* $\vec{u},\vec{v}$ *et* $\vec{w}$.
   (b) *Cette décomposition suivant* $\vec{u},\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *est-elle unique ?*

Exercice 6. *Dans les deux cas suivants, les vecteurs forment-ils une famille génératrice de* $\mathbb{R}^3$ *?*

$$1) \quad \vec{u}(1,-1,2) \quad \vec{v}(3,1,1) \quad \vec{w}(-3,-5,4).$$
$$2) \quad \vec{u}(0,1,3) \quad \vec{v}(-1,1,0) \quad \vec{w}(2,0,1) \quad \vec{t}(4,5,6).$$

Exercice 7. *On considère les vecteurs de* $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u}(1,0,1) \quad \vec{v}(-1,-1,0) \quad \vec{w}(-1,1,1).$$

1. *Démontrer que la famille* $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ *est une base.*
2. *Exprimer les coordonnées du vecteur* $(2,2,3)$ *dans cette base.*

3 Dimension, sommes de sous-espaces

Exercice 8. *On considère les vecteurs de* $\mathbb{R}^4$

$$\vec{u_1}(1,0,4,2), \quad \vec{u_2}(1,2,3,1), \quad \vec{u_3}(1,-2,5,3),$$
$$\vec{v_1}(4,2,0,1), \quad \vec{v_2}(1,4,2,1).$$

Soient U et V les sous-espaces engendrés respectivement par les familles $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$.

1. *Déterminer une base des espaces U et V.*
2. *En déduire la dimension des espaces U et V.*
3. *Démontrer que*
$$\mathbb{R}^4 = U \oplus V.$$