Université Aix-Marseille
UFR Sciences
Licence de physique et chimie
Semestre 2

UE Mathématiques 2
TD 6
Application linéaire associée à une matrice

1 Matrice et application linéaire

Exercice 1. *On considère les applications linéaires f et g représentées par les matrices respectives :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer l'image d'un vecteur quelconque $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, par chacune des applications*
$$f, \; g \text{ et } f + g.$$
2. *Déterminer les matrices des applications*
$$f - 2g, \; f \circ g \text{ et } g \circ f.$$

Exercice 2. *On considère l'application linéaire définie par*

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

1. *Déterminer la matrice A de f.*
2. *Déterminer les images par f des vecteurs*

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad et \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2 Noyau et image d'une application linéaire

Exercice 3. *On considère l'application linéaire définie par*

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + y \end{pmatrix}. \end{array}$$

1. *Démontrer que f est injective.*

2. *Démontrer que f est surjective.*
3. *Que peut-on déduire sur f ?*
4. *Déterminer la matrice A de f. Que peut-on dire de A ?*
5. *Déterminer A^{-1}. Quelle application linéaire est associée à A^{-1} ?*

Exercice 4. *On considère l'application linéaire définie par*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

1. *Déterminer la matrice A de f.*
2. *Noyau de f.*
   (a) *Déterminer* $\ker(f)$.
   (b) *Que peut-on déduire sur f ?*
3. *Image de f.*
   (a) *Déterminer $Im(f)$.*
   (b) *Que peut-on déduire sur f ?*
4. *On considère l'ensemble P défini par*

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

   (a) *Démontrer que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*
   (b) *Déterminer une base de P.*
   (c) *Déterminer une base de $f(P)$.*
   (d) *Déterminer la dimension de P et celle de $f(P)$.*

Exercice 5. *On considère l'application linéaire définie par*

$$f_k: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} (2-k)x + (k-1)y \\ 2(1-k)x + (2k-1)y \\ kz \end{pmatrix}. \end{array}$$

où k désigne une constante réelle.

1. *Déterminer la matrice M_k de f_k.*
2. *Etude du cas $k = 0$.*
   (a) *Déterminer* $\ker(f_0)$ *et sa dimension.*
   (b) *Déterminer le rang de f_0.*
3. *Etude du cas $k = 1$.*
   (a) *Déterminer* $\ker(f_1)$ *et sa dimension.*
   (b) *Déterminer le rang de f_1.*