Université Aix-Marseille
UFR Sciences
Licence de physique et chimie
Semestre 2

UE Mathématiques 2
TD 7
Déterminant

1 Calcul d'un déterminant

Exercice 1. *Calculer les déterminants*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad et \quad \begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ -9 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2. *Calculer les déterminants*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3. *Soient x_1, x_2 et x_3 trois réels. Calculer le déterminant*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

2 Application des déterminants

Exercice 4. *On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^2$*

$$\vec{u}(1,3), \quad \vec{v}(-1,2).$$

1. *En utilisant les déterminants, déterminer si ces vecteurs sont linéairement indépendants.*
2. *Même question avec les vecteurs*

$$\vec{u}(1,5), \quad \vec{v}(3,15).$$

Exercice 5. *On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$*

$$\vec{u}(1,1,1), \quad \vec{v}(-1,0,1), \quad \vec{w}(-1,-1,0).$$

1. *En utilisant les déterminants, déterminer si ces vecteurs sont linéairement indépendants.*
2. *Même question avec les vecteurs*

$$\vec{u}(1,3,2), \quad \vec{v}(1,2,-1), \quad \vec{w}(0,1,3).$$

Exercice 6. *Soient a, b, c et d des réels tels que $ad - bc \neq 0$. On considère les matrices carrées d'ordre 2*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. *Ces matrices sont-elles inversibles ?*
2. *Si ces matrices sont inversibles, déterminer leur inverse en utilisant deux méthodes.*

Exercice 7. *On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, définie par*

$$f(\vec{e_1}) = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 3\vec{e_3}$$

$$f(\vec{e_2}) = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_3}$$

$$f(\vec{e_3}) = \vec{e_1} + \vec{e_2} + 2\vec{e_3}.$$

1. *Déterminer la matrice A associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
2. *En utilisant les déterminants, déterminer le rang de f.*
3. *En déduire la dimension du noyau de f.*

Exercice 8. *Soit α un réel. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique et on considère l'application linéaire f_α qui est représentée dans la base canonique par la matrice*

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2-\alpha & -1 & 3 \\ -1 & 1-\alpha & -2 \\ 2 & 3 & 2-\alpha \end{pmatrix}.$$

En utilisant les déterminants, déterminer le rang de f_α. On discutera suivant les valeurs de α.

Exercice 9. *On se place dans $\mathbb{R}^2$. On considère les vecteurs*

$$\vec{u}(2,1), \quad \vec{v}(-4,5)$$

et les points

$$A(1,1), \quad B(2,-1), \quad C(4,6).$$

1. *Calculer l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*
2. *Calculer l'aire du parallélogramme dont trois des sommets sont les points A, B et C.*

Exercice 10. *On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$*

$$\vec{u}(1,1,3), \quad \vec{v}(1,2,-1), \quad \vec{w}(1,4,1).$$

Déterminer le voluime du parallélépipède engendré par ces 3 vecteurs.