Université de Provence
TMB - L1

Deuxième session : corrigé

I

1. $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ et $z_2 = 2\, e^{-i\pi/3}$

2. $z_1^n = 2^{n/2}\, e^{in\pi/4}$ et $z_2^n = 2^n\, e^{-in\pi/3}$

3. $$z^4 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{e^{i\pi/4}}{e^{-i\pi/3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\pi(\frac{1}{4}+\frac{1}{3})}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\pi 7/12}$$

Si on écrit $z = \rho e^{i\theta}$, on voit qu'il faut
$\rho^4 = 2^{-1/2}$ et $4\theta = \frac{7}{12}\pi + 2k\pi$
ce qui donne quatre solutions pour z :

$$\boxed{2^{-1/8}\, e^{i\frac{7}{48}\pi},\ 2^{-1/8}\, e^{i\frac{31}{48}\pi},\ 2^{-1/8}\, e^{i\frac{55}{48}\pi},\ 2^{-1/8}\, e^{i\frac{79}{48}\pi}.}$$

II

1. Comme $\vec{AB}\left|\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right.$ et $\vec{AC}\left|\begin{matrix}-2\\0\\1\end{matrix}\right.$, on obtient que les coordonnées de $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ vérifient $\vec{AB}\wedge\vec{AC}\left|\begin{matrix}-2\\-5\\4\end{matrix}\right.$. On voit que
$\|\vec{AB}\| = \sqrt{14}$, $\|\vec{AC}\| = \sqrt{5}$ et $\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\| = 3\sqrt{5}$, d'où
$$\sin(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

2. Si $M(x,y,z)$ appartient à la droite passant par les points A et B, on doit avoir pour un certain nombre réel t :
$\vec{AM} = t\,\vec{AB}$
ce qui donne
$$x = 4+t$$
$$y = 1+2t$$
$$z = 1+3t.$$

3. On écrit que le point $M(x,y,z)$ appartient en même temps à la droite (D) et au plan (P), d'où
$(4+t) + 2(1+2t) + 3(1+3t) + 1 = 0$,
ce qui donne $14t + 10 = 0$. Le paramètre t doit donc être égal à $-\frac{5}{7}$ et le point d'intersection correspondant a pour coordonnées $\left(\frac{23}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-8}{7}\right)$

4. Le plan (P) ayant pour équation cartésienne $x+2y+3z+1=0$, et sachant que les coefficients de x, y et z donnent les coordonnées d'un vecteur normal à (P), on voit que $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P). C'est exactement le vecteur $\vec{AB}$ qui est un vecteur directeur de la droite (D).

La distance de A au plan (P) est exactement la longueur du vecteur $\vec{AC}$ si C est l'intersection de (D) et (P). Ainsi on a

$$d(A,(P)) = \|\vec{AC}\| = \sqrt{\left(\frac{33}{7}-4\right)^2 + \left(\frac{17}{7}-1\right)^2 + \left(\frac{22}{7}-1\right)^2}$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

III

1. Les fonctions $t \to x(t)$ et $t \to y(t)$ sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Comme les valeurs de $x(t)$ et $y(t)$ ne changent pas lorsque l'on remplace t par $-t$, il suffit d'étudier et tracer la courbe pour les valeurs $t \geq 0$. On a

$$x'(t) = 2t\,\frac{1-3t^8}{(1+t^8)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = 2t^5\,\frac{3-t^8}{(1+t^8)^2}$$

ce qui donne d'une part le vecteur vitesse $\vec{V}'(t)$

$$\vec{V}'(t) = \frac{2t}{(1+t^8)^2}\begin{cases}1-3t^8\\ t^4(3-t^8)\end{cases}$$

et d'autre part, le tableau ci-contre

t	0		$3^{-1/8}$		$3^{1/8}$		$+\infty$
x'	0	$+$	0		$-$		
x	0	$\nearrow$	$\frac{3^{3/4}}{4}$	$\searrow$	$\frac{3^{1/4}}{4}$	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3^{1/4}}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3^{3/4}}{4}$	$\searrow$	0
y'	0		$+$		0		$-$

Pour trouver les demi-tangentes à l'origine on regarde le rapport

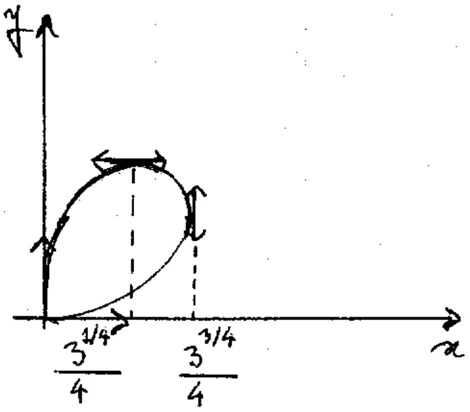
$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^6}{1+t^8} \times \frac{1+t^8}{t^2} = t^4$$

d'où

$$\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty$$

ce qui donne les deux demi-tangentes suivantes à l'origine :

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$



2. On note que $\rho^2 = x^2(t) + y^2(t) = \dfrac{t^4}{1+t^8}$ et $x(t)y(t) = \rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)$

Par ailleurs, $x(t)y(t) = \dfrac{t^8}{(1+t^8)^2}$ ce qui montre que $\dfrac{t^8}{(1+t^8)^2} = \dfrac{\rho^2}{2}\sin(2\theta)$

et $\rho^4 = \dfrac{\rho^2}{2}\sin(2\theta)$. Ainsi $\rho^2 = \dfrac{1}{2}\sin(2\theta)$. La figure montre que

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ce qui permet de prendre la racine carrée puisque $\sin(2\theta) \geq 0$ ∎

IV

1. Théorème de Cauchy

Soient a et x_0 deux nombres réels ou complexes et f une fonction continue, ces trois éléments étant connus et donnés. Alors le problème

$$\begin{cases} x'(t) = a\,x(t) + f(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

admet une solution $t \to x(t)$ unique.

Il y a d'autres formulations de ce théorème.

2. Nous cherchons une solution de la forme
$y(x) = ax^2 + bx + c$.
Elle doit vérifier la relation
$2ax + b - 2x(ax^2 + bx + c) = 2x + 2x^3$,
ce qui donne, en regroupant les termes de même degré,

$$-2ax^3 - 2bx^2 + 2(a-c)x + b = 2x + 2x^3.$$

Comme cette égalité doit être vérifiée pour toutes les valeurs de x, on a

$$-2a = 2,\ -2b = 0,\ 2(a-c) = 2,\ b = 0,$$

ce qui s'écrit encore

$$a = -1,\ b = 0,\ c = -2,$$

et donne

$$y_p(x) = -x^2 - 2.$$

3. On sait que les solutions de l'équation homogène
$y'(x) - 2x\,y(x) = 0$
s'écrivent

$$y(x) = C e^{\int 2x\,dx}, \text{ c'est à dire } y(x) = C e^{x^2}.$$

Ainsi, la solution générale y_g de (E) est de la forme

$$y_g(x) = C e^{x^2} - x^2 - 2$$

et il suffira de choisir convenablement la constante C.
On voit que

$$y_g(0) = C - 2.$$

Il faut donc que $C = 3$ et on arrive à la solution cherchée, soit

$$\boxed{y(x) = 3e^{x^2} - x^2 - 2}$$