

Techniques Mathématiques de Base
CORRECTION DU DEVOIR À LA MAISON N° 2

Exercice 1: Soient a, b, h trois réels strictement positifs, avec $a < b$. On considère la surface $S \subset \mathbb{R}^3$ définie par l'équation

$$\frac{z^2}{h^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

1. Montrer que si le point M , de coordonnées (x, y, z) , appartient à S alors les points de coordonnées $(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ appartiennent à S pour tous les nombres réels α .
2. Vérifier que l'intersection de S avec le plan d'équation $x = 0$ est constituée de deux droites. Quel est l'angle, en fonction des paramètres b et h , entre ces deux droites?
3. Mêmes questions pour l'intersection de S avec le plan d'équation $y = 0$. Lequel des deux angles trouvés aux questions 1. et 2. est-il le plus grand ?
4. Donner l'équation du plan tangent à la surface S en chaque point $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ différent de l'origine. Démontrer qu'il existe une et une seule droite D contenue dans S et passant par M_0 différent de l'origine.
5. Étant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer l'intersection de S avec le plan d'équation $z = \lambda$. Représenter la surface S dans le cas $(a, b, h) = (1, 2, 1)$. Comment appelle-t-on la surface S lorsque $a = b = h$?
6. Chercher une représentation paramétrique de S : on pourra démontrer qu'un point $M(x, y, z)$ appartient à S si et seulement s'il existe $u, v \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} x = au \cos(v) \\ y = bu \sin(v) \\ z = hu. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 1

1. Si le point $M(x, y, z)$ appartient à S , ses coordonnées vérifient la relation $\frac{z^2}{h^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ qui restera vraie si on multiplie les deux membres de cette relation par le nombre réel α^2 . Ceci signifie que la relation est vérifiée par le point αM de coordonnées $(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$. On peut donc dire que la surface S est une réunion de droites passant par l'origine (un cône est seulement une réunion de demi-droites de même sommet).
2. Un point $M(x, y, z)$ appartient à l'intersection de S avec le plan $x = 0$ si et seulement si $(\frac{z^2}{h^2} = \frac{y^2}{b^2}$ et $x = 0)$, c'est à dire si et seulement si $(z = \frac{h}{b}y, x = 0)$ ou $(z = -\frac{h}{b}y, x = 0)$. Cet ensemble est la réunion de deux droites. L'angle θ entre ces deux droites est donné par $\theta = 2 \arctan \frac{h}{b}$.
3. Le raisonnement est le même. Les droites constituant l'intersection ont pour équation $(z = \frac{h}{a}x, y = 0)$ ou $(z = -\frac{h}{a}x, y = 0)$. L'angle θ' entre ces deux droites est donné par $\theta' = 2 \arctan \frac{h}{a}$. Comme $0 < a < b$ et que la fonction $\arctan$ est croissante, il est clair que $\theta < \theta'$.
4. La surface S étant définie par une équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, un vecteur normal en chacun de ses points est donné par le vecteur gradient $\nabla f(x, y, z)$ si ce gradient est non nul. Dans le cas considéré on peut poser $f(x, y, z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{h^2}$, ce qui donne au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, -\frac{2z_0}{h^2} \right).$$

Si le point M_0 est différent de l'origine, le gradient obtenu est non nul et constitue donc une normale à la surface S . On en déduit donc une équation du plan tangent en ce point M_0 , à savoir

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) - \frac{z_0}{h^2}(z - z_0) = 0.$$

Comme le point M_0 appartient à S on peut utiliser la relation existant entre ses coordonnées d'où

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{z_0}{h^2}z = 0.$$

D'après la question 1/ la droite reliant le point M_0 à l'origine est contenue dans la surface ce qui explique bien l'absence du terme constant dans l'équation donnant ce plan.

Peut-il y avoir une autre droite passant par M_0 et contenue dans S ? La réponse est non. En effet, elle ne peut être horizontale (voir la question suivante) et coupera donc le plan horizontal $z = 0$. Mais, l'origine étant le seul point de S qui vérifie $z = 0$, cette droite passera par l'origine et M_0 . Elle sera donc confondue avec la droite signalée dans le paragraphe précédent.

5. Les coordonnées des points composant l'intersection de S avec le plan horizontal $z = \lambda$ vérifient ($z = \lambda, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\lambda^2}{h^2}$) ce qui donne une ellipse. Dans le cas particulier $a = 1, b = 2, h = 1$, la surface est donnée par l'équation cartésienne $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{4}$. Lorsque $a = b = h$, l'équation cartésienne est $z^2 = x^2 + y^2$ qui est une surface de révolution d'axe $0z$. Comme on a déjà vu que c'est aussi un cône on a affaire à deux cônes de révolution d'axe $0z$, symétriques par rapport au plan $z = 0$, et s'appuyant sur les cercles ($x^2 + y^2 = 1, z = \pm 1$).
6. On vérifie immédiatement que la représentation paramétrique suggérée satisfait l'équation cartésienne donnée pour la surface S . Examinons l'autre sens. On peut toujours mettre la coordonnée z sous la forme $z = hu$. Il vient alors que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = u^2$, ce qui est l'équation cartésienne d'une ellipse si on suppose que la coordonnée z est fixée. Divisant par u^2 on obtient $\frac{x^2}{(ua)^2} + \frac{y^2}{(ub)^2} = 1$. Dans $\mathbb{R}^2$ les points $(\frac{x}{ua}, \frac{y}{ub})$ appartiennent donc au cercle de centre 0 et de rayon 1. On peut donc écrire $x = ua \cos(v), y = ub \sin(v)$ pour un nombre réel v convenable tel que $0 \leq v < 2\pi$.

Exercice 2 : Calculer les dérivées partielles, lorsqu'elles existent, de l'expression suivante:

$$f(x, y, z) = (x - z)^{(y^z)}$$

On précisera bien les parties de l'espace où les calculs effectués ont du sens.

Correction de l'exercice 2 On remarque d'abord $(x - z)^{(y^z)} = e^{y^z \ln(x-z)} = e^{e^{z \ln y} \ln(x-z)}$. Il est alors clair qu'il faudra supposer que $y > 0$ et $x > z$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= (e^{e^{z \ln y} \ln(x-z)}) \frac{\partial(e^{z \ln y} \ln(x-z))}{\partial x} = (e^{e^{z \ln y} \ln(x-z)}) e^{z \ln y} \frac{\partial \ln(x-z)}{\partial x} = (x - z)^{(y^z)-1} y^z \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= (e^{e^{z \ln y} \ln(x-z)}) \frac{\partial(e^{z \ln y} \ln(x-z))}{\partial y} = (e^{e^{z \ln y} \ln(x-z)}) \ln(x - z) \frac{\partial e^{z \ln y}}{\partial y} = (x - z)^{(y^z)} y^z \ln(x - z) \frac{z}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= (e^{e^{z \ln y} \ln(x-z)}) \frac{\partial(e^{z \ln y} \ln(x-z))}{\partial z} = (e^{e^{z \ln y} \ln(x-z)}) \left[\frac{\partial e^{z \ln y}}{\partial z} \ln(x - z) + e^{z \ln y} \frac{\partial \ln(x-z)}{\partial z} \right] \\ &= (x - z)^{(y^z)} [y^z (\ln y) (\ln(x - z)) - \frac{y^z}{x-z}] = (x - z)^{(y^z)} y^z [(\ln y) (\ln(x - z)) - \frac{1}{x-z}] \end{aligned}$$