Université de Provence

Techniques mathématiques de base
Correction du Devoir à rendre 1

Exercice 1: Tout d'abord, $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Donc

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Sous forme exponentielle c'est $\boxed{z_1 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}$.

Ensuite $|z_2| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$, d'où

$$z_2 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Sous forme exponentielle c'est $\boxed{z_2 = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}}$.

Exercice 2: En utilisant la formule de Moivre, il vient

$$\begin{aligned} z_1^n &= \left(\sqrt{2}\right)^n \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n \\ &= \sqrt{2}^n e^{-in\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z_2^n &= 2^n \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n \\ &= 2^n e^{in\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

Exercice 3: Il faut tout d'abord mettre $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ sous forme polaire. D'après la question 1, on a

$$\begin{aligned} \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}}{2\, e^{i\pi/3}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-i7\frac{\pi}{12}}. \end{aligned}$$

Pour résoudre l'équation $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$:
cherchons d'abord tous les $\rho \in \mathbb{R}^+$ et les $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\left(\rho e^{i\theta}\right)^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.
Cette équation équivaut à $\rho^4 e^{i4\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ e^{-i7\frac{\pi}{12}}$ donc, par identification des modules et des arguments, elle équivaut à

$$\rho^4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad 4\theta = -7\frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$