

Techniques mathématiques de base
Correction du Devoir à rendre 2

Exercice 13: Pour montrer que les angles $\widehat{OAB}$, $\widehat{OBC}$ et $\widehat{ODC}$ sont droits, il suffit de calculer les produits scalaires $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{DC}$. Par exemple, calculons $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$, les produits scalaires restants étant similaires.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} 9 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \end{vmatrix} = 9 \times 0 + 0 \times 3 = 0.$$

En ce qui concerne les tangentes, nous avons

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{AB}{OA} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \\ \tan \beta &= \frac{BC}{OB} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}}{\sqrt{9^2 + 3^2}} = \frac{1}{3} \\ \tan \gamma &= \frac{CD}{OD} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}}{\sqrt{7^2 + 7^2}} = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

D'autre part, il est clair que $\alpha + \beta + \gamma = \widehat{AOD}$. Or

$$\widehat{AOD} = \text{Arg} \left(\frac{z_D - z_O}{z_A - z_O} \right) = \text{Arg} \left(\frac{7 + 7i}{9} \right) = \text{Arg} \left(\frac{7\sqrt{2}}{9} e^{i\pi/4} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Finalement

$$\frac{\pi}{4} = \alpha + \beta + \gamma = 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}.$$