Techniques mathématiques de base
Correction des exercices à rédiger à la maison des planches 3 et 4

Exercice 11 (planche 3) :

a/ Un vecteur normal à (P) est:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b/ Il est clair que $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite cherchée. Une équation paramétrique de celle-ci est donc

$$\begin{cases} x = A_x + t\vec{n}_x & = 1 + t \\ y = A_y + t\vec{n}_y & = 1 + t \\ z = A_z + t\vec{n}_z & = 1 + t \end{cases}$$

pour $t \in \mathbb{R}$.

c/ (Pour rester dans l'esprit de l'exercice, le mieux est de ne pas utiliser directement la formule donnant la distance.)

La projection orthogonale H , de coordonnées (x_0, y_0, z_0) , de A sur (P) est l'intersection de la droite orthogonale à (P) passant par A et de (P) . D'après la question b/, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 = y_0 = z_0 = 1 + t$. En injectant ceci dans l'équation cartésienne de (P) , on obtient

$$3t + 3 = 0$$

d'où $t = -1$. Finalement $H = (0, 0, 0)$. La distance de A à (P) vaut donc $AH = \sqrt{3}$.

Exercice 9 (planche 4) :

La démonstration de cet exercice se fait en plusieurs étapes. La première consiste à énoncer le théorème suivant.

Theorem 0.1. *Pour toute vitesse initiale $v_0 \in \mathbb{R}_+$, il existe une unique solution $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ au problème*

$$(E) \quad \begin{cases} v'(t) = mg - bv^2(t), \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

Remarques :

- Ce théorème a déjà été énoncé et prouvé pour les équations différentielles linéaires du premier ordre. Ce n'est pas le cas ici car le terme v^2 enlève le caractère linéaire de l'équation. Le terme mg est ce que nous appelons le second membre dans le cours.

- La fonction constante $v(t) = \sqrt{\frac{mg}{b}}$ est solution du problème (E) avec pour condition initiale $v(0) = \sqrt{\frac{mg}{b}}$.

La suite du raisonnement va alors consister à étudier le comportement de la solution en fonction de la condition initiale. Soit donc v la solution du problème (E) avec, pour condition initiale, $v_0 \geq 0$.

1. Si $v(0) = \sqrt{\frac{mg}{b}}$ alors, à l'aide du théorème 1 et de la remarque, on en déduit

$$\forall t \geq 0, \quad v(t) = \sqrt{\frac{mg}{b}}.$$

2. Si $0 \leq v(0) < \sqrt{\frac{mg}{b}}$. L'objectif va être alors de montrer que l'on a $0 \leq v(t) < \sqrt{\frac{mg}{b}}$ pour tout $t \geq 0$ et de calculer explicitement la solution. Soit donc t_0 le plus petit t tel que $v(t) \geq \sqrt{\frac{mg}{b}}$ si un tel t existe, ou sinon $t_0 = +\infty$. Comme la fonction v est continue en 0, on peut voir que $t_0 > 0$. En effet, d'après la définition de la continuité avec $\varepsilon = (\sqrt{\frac{mg}{b}} - v_0)/2 > 0$, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, \alpha], \quad |v(t) - v(0)| < \varepsilon.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} v(t) &< v_0 + \varepsilon \\ &= (v_0 + \sqrt{\frac{mg}{b}})/2 \\ &< \sqrt{\frac{mg}{b}} \end{aligned}$$

et donc $t_0 > \alpha$.

L'intérêt de ce résultat est que nous pouvons affirmer que, sur l'intervalle $[0, t_0[$, la fonction $mg - bv^2$ ne s'annule pas. Pour $t \in [0, t_0[$, on déduit donc de l'équation $v'(t) = mg - bv^2(t)$ que l'on a $\frac{v'(t)}{mg - bv^2(t)} = 1$. D'où, en intégrant,

$$\forall t \in [0, t_0[, \quad \int_0^t \frac{v'(r)}{mg - bv^2(r)} dr = t.$$

Il faut donc calculer cette intégrale. Pour cela on utilise l'identité (qui peut s'obtenir en identifiant les deux membres de l'égalité qui suit), pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{\frac{mg}{b}}; \sqrt{\frac{mg}{b}}\}$,

$$\frac{1}{mg - bx^2} = \frac{1}{2mg} \left(\frac{1}{1 - \sqrt{\frac{b}{mg}}x} + \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{b}{mg}}x} \right).$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} t &= \int_0^t \frac{v'(r)}{mg - bv^2(r)} dr \\ &= \int_0^t \frac{1}{2mg} \left(\frac{v'(r)}{1 - \sqrt{\frac{b}{mg}}v(r)} + \frac{v'(r)}{1 + \sqrt{\frac{b}{mg}}v(r)} \right) dr \\ &= \left[-\ln(1 - \sqrt{\frac{b}{mg}}v(r)) + \ln(1 + \sqrt{\frac{b}{mg}}v(r)) \right]_0^t \\ &= \ln \frac{(1 - \sqrt{\frac{b}{mg}}v_0)(1 + \sqrt{\frac{b}{mg}}v(t))}{(1 + \sqrt{\frac{b}{mg}}v_0)(1 - \sqrt{\frac{b}{mg}}v(t))} \end{aligned}$$

Posons $A = \frac{1 + \sqrt{\frac{b}{mg}}v_0}{1 - \sqrt{\frac{b}{mg}}v_0} > 0$ et prenons l'exponentielle dans l'égalité précédente, on a

$$Ae^t = \frac{1 + \sqrt{\frac{b}{mg}}v(t)}{1 - \sqrt{\frac{b}{mg}}v(t)}.$$

Il faut ensuite réduire au même dénominateur et isoler $v(t)$ pour obtenir

$$(1) \quad v(t) = \sqrt{\frac{mg}{b}} \frac{Ae^t - 1}{Ae^t + 1}.$$

Nous sommes maintenant en position de conclure. Supposons que $t_0 < +\infty$ (et l'on va montrer que c'est impossible!). On a alors $v(t_0) = \sqrt{mg/b}$. Or pour tout $t < t_0$, la solution v est donnée par (1). En prenant la limite lorsque t tend vers t_0 par valeurs inférieures, on obtient

$$v(t_0) = \sqrt{\frac{mg}{b} \frac{Ae^{t_0} - 1}{Ae^{t_0} + 1}} < \sqrt{\frac{mg}{b} \frac{Ae^{t_0} + 1}{Ae^{t_0} + 1}} = \sqrt{\frac{mg}{b}}.$$

Or ceci nous donne une contradiction. Ceci signifie que $t_0 = +\infty$ et donc que la formule (1) est valable pour tout $t \geq 0$.

3. Si $v(0) > \sqrt{\frac{mg}{b}}$. L'objectif va être maintenant de montrer que l'on a $v(t) > \sqrt{\frac{mg}{b}}$ pour tout $t \geq 0$ et de calculer explicitement la solution. Comme précédemment, on définit t_0 comme le plus petit t tel que $v(t) \leq \sqrt{\frac{mg}{b}}$ si un tel t existe, ou sinon $t_0 = +\infty$. Comme la fonction v est continue en 0, on peut montrer que $t_0 > 0$ (même méthode que précédemment).

Sur l'intervalle $[0, t_0[$, la fonction $mg - bv^2$ ne s'annule pas. Pour $t \in [0, t_0[$, on déduit donc de l'équation $v'(t) = mg - bv^2(t)$ que l'on a $\frac{v'(t)}{mg - bv^2(t)} = 1$. D'où, en intégrant,

$$\forall t \in [0, t_0[, \quad \int_0^t \frac{v'(r)}{mg - bv^2(r)} dr = t.$$

Il faut à nouveau calculer cette intégrale. Par rapport au précédent calcul, ce sont les primitives des fonctions considérées qui vont changer. On a toujours

$$\begin{aligned} t &= \int_0^t \frac{v'(r)}{mg - bv^2(r)} dr \\ &= \int_0^t \frac{1}{2mg} \left(\frac{v'(r)}{1 - \sqrt{\frac{b}{mg}}v(r)} + \frac{v'(r)}{1 + \sqrt{\frac{b}{mg}}v(r)} \right) dr \\ &= \left[-\ln(\sqrt{b/mg}v(r) - 1) + \ln(1 + \sqrt{b/mg}v(r)) \right]_0^t \\ &= \ln \frac{(\sqrt{b/mg}v_0 - 1)(\sqrt{b/mg}v(t) + 1)}{(\sqrt{b/mg}v_0 + 1)(\sqrt{b/mg}v(t) - 1)} \end{aligned}$$

Posons $A = \frac{\sqrt{b/mg}v_0 + 1}{\sqrt{b/mg}v_0 - 1} > 0$ et prenons l'exponentielle dans l'égalité précédente. On a alors

$$Ae^t = \frac{\sqrt{b/mg}v(t) + 1}{\sqrt{b/mg}v(t) - 1}.$$

Il faut ensuite réduire au même dénominateur et isoler $v(t)$ pour obtenir

$$(2) \quad v(t) = \sqrt{\frac{mg}{b} \frac{Ae^t + 1}{Ae^t - 1}}.$$

Nous pouvons conclure. Supposons que $t_0 < +\infty$ (et l'on va montrer que c'est impossible!). On a alors $v(t_0) = \sqrt{mg/b}$. Or pour tout $t < t_0$, la solution v est donnée par (2). En prenant la limite lorsque t tend vers t_0 par valeurs inférieures, on obtient

$$v(t_0) = \sqrt{\frac{mg}{b} \frac{Ae^{t_0} + 1}{Ae^{t_0} - 1}} > \sqrt{\frac{mg}{b} \frac{Ae^{t_0} + 1}{Ae^{t_0} + 1}} = \sqrt{\frac{mg}{b}}.$$

Or ceci nous donne une contradiction. Ceci signifie que $t_0 = +\infty$ et donc que la formule (2) est valable pour tout $t \geq 0$.

Dans les trois cas, il est facile de voir que la vitesse du parachutiste tend vers $\sqrt{\frac{mg}{b}}$ lorsque t tend vers $+\infty$ mais est-ce possible ? En effet, a-t-on déjà vu un parachutiste ne jamais arrêter sa course ?