Université de Provence Auteur: Rémi Rhodes

Techniques mathématiques de base
Correction du Devoir à rendre 5

Exercice 9:
Considérons l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = xe^x. \tag{1}$$

1. L'équation caractéristique associée est

$$X^2 - 2X + 2 = 0,$$

dont les racines sont $1 - i$ et $1 + i$. Les solutions de l'équation homogène associée à (1) sont donc de la forme

$$y_H(x) = e^x\Big(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)\Big). \tag{2}$$

Cherchons maintenant la solution satisfaisant $y(0) = y'(0) = 1$. En remplaçant $x = 0$ dans (2), on trouve $C_1 = 1$. Puis on dérive (2)

$$y_H(x) = e^x\Big((-C_1 + C_2)\sin(x) + (C_1 + C_2)\cos(x)\Big),$$

et on choisit $x = 0$, ce qui donne $C_2 = 0$. Finalement, la solution cherchée est

$$\boxed{y(x) = e^x \cos(x).}$$

2. Cherchons maintenant une solution particulière de (1) de la forme $y(x) = (ax + b)e^x$. Ceci donne

   - $y(x) = (ax + b)e^x$,
   - $y'(x) = (ax + b + a)e^x$,
   - $y''(x) = (ax + b + 2a)e^x$.

En injectant ceci dans (1), on obtient

$$(ax+b)e^x = xe^x$$

d'où $a = 1$ et $b = 0$. La solution particulière est donc

$$\boxed{y_P(x) = xe^x.}$$

3. Trouvons maintenant la solution de (1) satisfaisant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. Elle est de la forme
$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = e^x\Big(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\Big) + xe^x.$$
En choisissant $x = 0$, on trouve $C_1 = 1$. Puis en dérivant et prenant $x = 0$, on obtient $C_2 = -1$. Ceci donne
$$\boxed{y(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) + xe^x.}$$

4. Pour finir, on cherche la solution de (1) satisfaisant $y(1) = y'(1) = 0$. Cette solution doit être de la forme
$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = e^x\Big(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\Big) + xe^x.$$
L'idée, pour simplifier les calculs, est de remarquer que, quitte à changer les constantes C_1 et C_2 en $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$, ceci peut se réécrire
$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = e^x\Big(\tilde{C}_1\cos(x-1) + \tilde{C}_2\sin(x-1)\Big) + xe^x.$$

En choisissant $x = 1$, on a $\tilde{C}_1 + 1 = 0$. Il reste alors à dériver et choisir à nouveau $x = 1$ pour obtenir $\tilde{C}_2 = -1$. Ainsi, la solution cherchée est

$$\boxed{y(x) = -e^x(\cos(x-1) + \sin(x-1)) + xe^x.}$$