

Techniques mathématiques de base

Corrigé de la planche 5

Rappel: On appelle "équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ ", l'équation $aX^2 + bX + c = 0$. Ses solutions sont deux nombres réels ou complexes, tandis que les solutions de l'équation différentielle sont des fonctions. Les trois premiers exercices donnent les formules pour calculer ces fonctions dans les trois cas possibles: $b^2 - 4ac$ strictement positif, nul ou strictement négatif.

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes:

a) $y''(x) - y(x) = 0$ sachant que $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.

b) $y''(x) - y(x) = e^{2x}$ sachant que $y(0) = y'(0) = 0$. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = Ae^{2x}$ où A est une constante.

a) Équation caractéristique: $X^2 - 1 = 0$. Ses solutions sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$.

Solutions de l'équation différentielle: $y(x) = Ce^{r_1x} + De^{r_2x} \Rightarrow \boxed{y(x) = Ce^x + De^{-x}}$ (C et D constantes).

La solution qui vérifie les conditions $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$: elle vérifie $y(0) = C + D = 2$ et, compte tenu que $y'(x) = Ce^x - De^{-x}$, elle vérifie aussi $y'(0) = C - D = 0$. On a donc le système d'équations
$$\begin{cases} C + D = 2 \\ C - D = 0 \end{cases}$$
 d'où on déduit $C = D = 1$ et $\boxed{y(x) = e^x + e^{-x}}$.

b) L'énoncé est mal posé, il faut d'abord chercher la solution particulière. Cette solution est $y(x) = Ae^{2x}$ d'après l'énoncé, et on l'injecte dans l'équation:

$$y''(x) - y(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 4Ae^{2x} - Ae^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow 3Ae^{2x} = e^{2x}.$$

On a donc $3A = 1$ c'est à dire $A = \frac{1}{3}$ et $\boxed{y(x) = \frac{1}{3}e^{2x}}$.

Puis on en déduit que la solution générale de l'équation différentielle de la question b) est $\boxed{y(x) = \frac{1}{3}e^{2x} + Ce^x + De^{-x}}$ (qu'on obtient en faisant la somme de la solution particulière et de la solution générale obtenue à la question a)).

La solution qui vérifie les conditions $y(0) = y'(0) = 0$: elle vérifie $y(0) = \frac{1}{3} + C + D = 0$ et, compte tenu que $y'(x) = \frac{2}{3}e^{2x} + Ce^x - De^{-x}$, elle vérifie aussi $y'(0) = \frac{2}{3} + C - D = 0$. On a donc le système d'équations
$$\begin{cases} C + D = -\frac{1}{3} \\ C - D = -\frac{2}{3} \end{cases}$$
 et, compte tenu que $C = \frac{(C+D) + (C-D)}{2}$, on en déduit $C = -\frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{6}$ et $\boxed{y(x) = \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{6}e^{-x}}$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes:

a) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$ sachant que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

b) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = xe^{4x}$ sachant que $y(0) = y'(0) = 0$. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = e^{4x}(Ax + B)$ où A, B sont des constantes.

a) Équation caractéristique: $X^2 - 4X + 4 = 0$ c'est à dire $(X - 2)^2 = 0$. Sa solution unique est $r = 2$.

Solutions de l'équation différentielle: $y(x) = e^{rx}(Cx + D) \Rightarrow \boxed{y(x) = e^{2x}(Cx + D)}$ (C et D constantes).

La solution qui vérifie les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$: elle vérifie $y(0) = D = 0$ et, compte tenu que $y'(x) = 2e^{2x}(Cx + D) + e^{2x}C$, elle vérifie aussi $y'(0) = 2D + C = 1$. On a donc le système d'équations

$$\begin{cases} D = 0 \\ 2D + C = 1 \end{cases} \quad \text{d'où on déduit } D = 0, C = 1 \text{ et } \boxed{y(x) = xe^{2x}}.$$

b) Solution particulière. Cette solution est $y(x) = e^{4x}(Ax + B)$ d'après l'énoncé, et on l'injecte dans l'équation:

$$\begin{aligned} y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) &= xe^{4x} \Leftrightarrow (16e^{4x}(Ax + B) + 4e^{4x}A + 4e^{4x}A) - 4(4e^{4x}(Ax + B) + e^{4x}A) + 4e^{4x}(Ax + B) = xe^{4x} \\ &\Leftrightarrow e^{4x}(4Ax + 4A + 4B) = e^{4x}. \end{aligned}$$

On a donc le système d'équations $\begin{cases} 4A = 1 \\ 4A + 4B = 0 \end{cases}$ d'où on déduit $A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}$ et $\boxed{y(x) = \frac{x-1}{4}e^{4x}}$.

Puis on en déduit que la solution générale de l'équation différentielle de la question b) est $\boxed{y(x) = \frac{x-1}{4}e^{4x} + e^{2x}(Cx + D)}$ (qu'on obtient en faisant la somme de la solution particulière et de la solution générale obtenue à la question a)).

La solution qui vérifie les conditions $y(0) = y'(0) = 0$: elle vérifie $y(0) = \frac{-1}{4} + D = 0$ et, compte tenu que $y'(x) = \frac{1}{4}e^{4x} + \frac{x-1}{4}4e^{4x} + 2e^{2x}(Cx + D) + e^{2x}C$, elle vérifie aussi $y'(0) = \frac{1}{4} + \frac{-1}{4} \cdot 4 + 2D + C = 0$. On a donc le système d'équations $\begin{cases} D = \frac{1}{4} \\ 2D + C = \frac{3}{4} \end{cases}$ d'où on déduit $C = D = \frac{1}{4}$ et $\boxed{y(x) = \frac{x-1}{4}e^{4x} + \frac{x+1}{4}e^{2x}}$.

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes:

a) $y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$ sachant que $y(0) = y'(0) = 1$.

b) $y''(x) + y'(x) + y(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ sachant que $y(0) = y'(0) = 1$. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ où A, B sont des constantes.

a) Équation caractéristique: $X^2 + X + 1 = 0$. Son discriminant $\Delta = -3$ étant négatif, elle a deux solutions complexes:

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Solutions de l'équation différentielle: $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) + D \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) \right)$ ce qui fait

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + D \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \right) \quad (C \text{ et } D \text{ constantes}).$$

La solution qui vérifie les conditions $y(0) = y'(0) = 1$: elle vérifie $y(0) = C = 1$ et, compte tenu que

$$y'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \left(C \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + D \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \right) + e^{-\frac{1}{2}x} \left(-C \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + D \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \right),$$

elle vérifie aussi $y'(0) = -\frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}D = 1$. On a donc le système d'équations $\begin{cases} C = 1 \\ -\frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}D = 1 \end{cases}$ d'où

on déduit $C = 1$, $D = \sqrt{3}$ et $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(\cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \right)$.

b) Solution particulière. Cette solution est $y(x) = A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$ d'après l'énoncé.

On l'injecte dans l'équation:

$$\left(-A \frac{3}{4} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) - B \frac{3}{4} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \right) + \left(-A \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + B \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \right) + \left(A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \right) = \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B \right) \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \left(\frac{1}{4}B - \frac{\sqrt{3}}{2}A \right) \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) = \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$$

On a donc le système d'équations $\begin{cases} \frac{1}{4}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 1 \\ \frac{1}{4}B - \frac{\sqrt{3}}{2}A = 0 \end{cases}$ d'où on déduit $A = \frac{4}{13}$, $B = \frac{8\sqrt{3}}{13}$ et

$$y(x) = \frac{4}{13} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \frac{8\sqrt{3}}{13} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$$

Puis on en déduit que la solution générale de l'équation différentielle de la question b) est

$$y(x) = \frac{4}{13} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \frac{8\sqrt{3}}{13} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + e^{-\frac{1}{2}x} \left(C \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + D \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \right) \quad (\text{qu'on obtient en}$$

faisant la somme de la solution particulière et de la solution générale obtenue à la question a)).

La solution qui vérifie les conditions $y(0) = y'(0) = 1$: elle vérifie $y(0) = \frac{4}{13} + C = 1$ et, compte tenu que

$$y'(x) = -\frac{4\sqrt{3}}{26} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \frac{24}{26} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \left(C \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + D \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \right) + e^{-\frac{1}{2}x} \left(-C \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + D \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \right)$$

elle vérifie aussi $y'(0) = \frac{24}{26} - \frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}D = 1$. On a donc le système d'équations $\begin{cases} C = 1 - \frac{4}{13} \\ -\frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}D = 1 - \frac{24}{26} \end{cases}$

d'où $C = \frac{9}{13}$, $D = \frac{11\sqrt{3}}{39}$ et $y(x) = \frac{4}{13} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \frac{8\sqrt{3}}{13} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + e^{-\frac{1}{2}x} \left(\frac{9}{13} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \frac{11\sqrt{3}}{39} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \right)$.