# Test 1

Étude de fonction :

$$f(x) = 1 + \sqrt{x}\ \ln x.$$

1) De même que le logarithme, la fonction $f$ est définie pour $x \in ]0, +\infty[$.

2) La dérivée de $f$ s'obtient en utilisant la formule $(uv)' = u'v + uv'$. C'est

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x}\ \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

3) Pour quelle valeur de $x$ s'annule-t-elle ? On réduit au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$$

et donc la dérivée s'annule si et seulement si $\ln x = -2$, ce qui fait $x = e^{-2} \simeq 0,135$

4) Tableau de variations :
On sait que $\lim_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0$, pour toute constante strictement positive $\alpha$. En particulier c'est vrai pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.
Quand $x$ tend vers $+\infty$, la limite de $f(x)$ est $+\infty$.

| x | 0 | | $e^{-2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | | − | | + | |
| f(x) | 1 | ↘ | 1−2/e | ↗ | $+\infty$ |

5) Courbe :