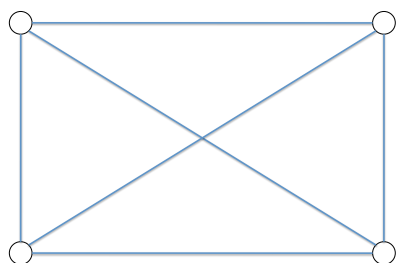
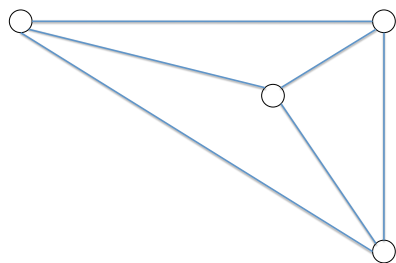


Test 1 corrigé

1) a) Le graphe suivant peut-il être dessiné de façon plane (en déplaçant les sommets)?

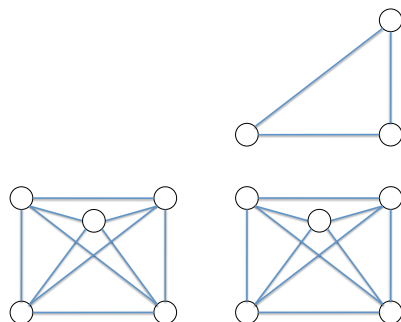


Réponse: Oui:



b) Dessiner un graphe à trois composantes connexes, dont une seule peut être représentée de façon plane, et à 23 arêtes.

Réponse: On dessine deux fois le graphe complet à 5 sommets, puis le graphe complet plane à 3 sommets:



2) Traduire avec des quantificateurs la phrase "tout réel est compris entre deux entiers consécutifs".

Réponse: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n \leq x < n + 1$.

3) Soit f une application strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Expliquer pourquoi elle est injective.

Réponse: Soient x_1 et x_2 deux réels distincts. Si $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) < f(x_2)$, et si $x_2 < x_1$ on a $f(x_2) < f(x_1)$. Donc dans les deux cas on a $f(x_1) \neq f(x_2)$, ce qui prouve que f est injective.

b) Est-elle forcément bijective?

Réponse: Non, par exemple e^x est strictement croissante mais elle n'est pas surjective parce que les réels négatifs n'ont pas d'antécédents ($y \leq 0, \nexists x, y = e^x$).

c) Quel est l'exemple le plus simple d'application strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne soit pas surjective? d'application strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne soit pas dérivable en $x = 0$?

Réponse: e^x est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais n'est pas surjective.

La fonction $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en $x = 0$, sa dérivée à gauche de 0 vaut 1 et sa dérivée à droite de 0 vaut 2.

