Test 2 corrigé

1) Démontrer l'inclusion *(sur 2 pts)*

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap B) \cup C.$$

Il faut démontrer que les éléments du premier ensemble sont aussi éléments du second.

Les éléments de $(A \cup B) \cap C$ appartiennent à C (parce qu'ils sont dans $A \cup B$ et dans C). On en déduit qu'ils appartiennent à $(A \cap B) \cup C$ parce que cet ensemble contient C (c'est la réunion de $A \cap B$ et de C).

2) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et x_0 un nombre réel. Écrire la négation de la phrase suivante:

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que tous les réels x qui vérifient $|x - x_0| \leq \alpha$, vérifient aussi $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. *(sur 2 pts)*

Pour nier cette phrase on peut dire: Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, les réels x qui vérifient $|x - x_0| \leq \alpha$ ne vérifient pas tous $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Ce qui revient à dire: Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, il existe au moins un réel x qui vérifie $|x - x_0| \leq \alpha$ et $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$.

3) Soient f et g deux applications de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$, définies par

$$f(x) = \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = -4x(x - 1).$$

a) Compléter le tableau de variations de la fonction g: *(sur 1 pt)*

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x) = -8x + 4$		$+$	0	-	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

b) Remplir le tableau suivant par des oui et des non: *(sur 2 pts)*

La fonction f est injective parce qu'elle ne prend pas deux fois la même valeur (c'est à dire si $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1 \neq f(x_2))$. Ce n'est pas une surjection de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ parce qu'elle ne "monte" pas jusqu'à 1: son maximum est $f(1) = \frac{1}{2}$.

La fonction g n'est pas injective parce qu'elle prend deux fois certaines valeurs (sa courbe monte puis descend, en repassant à la même hauteur). C'est une surjection de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$: pour $x = 0$ elle vaut 0 et pour $x = \frac{1}{2}$ elle vaut 1, et pour x entre 0 et $\frac{1}{2}$ elle prend toutes les valeurs intermédiaires entre 0 et 1.

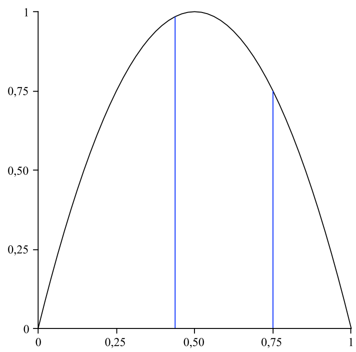
$f \circ g(x)$ c'est $\frac{1}{2}g(x)$, et c'est facile de répondre puisqu'on a déjà répondu pour g.

$g \circ f(x) = -x(x - 2)$ est une bijection de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ parce qu'elle croît de $g \circ f(0) = 0$ à $g \circ f(1) = 1$.

	f	g	$f \circ g$	$g \circ f$
injective	oui	non	non	oui
surjective	non	oui	non	oui
bijective	non	non	non	oui

c) Déterminer les intervalles $g\left(\left[\frac{7}{16}; \frac{3}{4}\right]\right)$ et $g^{-1}\left(\left[\frac{7}{16}; \frac{3}{4}\right]\right)$. *(sur 2+2 pts)*

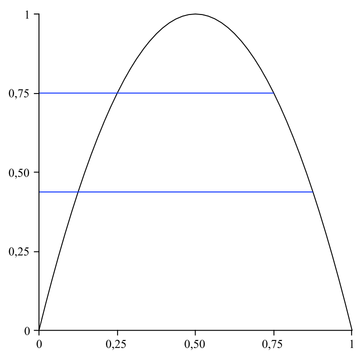
Pour déterminer $g\left(\left[\frac{7}{16}; \frac{3}{4}\right]\right)$ on place $\frac{7}{16}$ et $\frac{3}{4}$ sur l'axe des x:



Quand x est compris entre ces deux valeurs, $g(x)$ monte jusqu'à $g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ puis redescend à $g\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$ donc

$$g\left(\left[\frac{7}{16}; \frac{3}{4}\right]\right) = \left[\frac{3}{4}; 1\right].$$

Pour déterminer $g^{-1}\left(\left[\frac{7}{16}; \frac{3}{4}\right]\right)$ on place $\frac{7}{16}$ et $\frac{3}{4}$ sur l'axe des y:



On voit sur ce dessin que

quand $y = \frac{7}{16}$, x vaut $\frac{1}{8}$ ou $\frac{7}{8}$,

quand $y = \frac{3}{4}$, x vaut $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$,

quand x est compris entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{4}$, y est compris entre $\frac{7}{16}$ et $\frac{3}{4}$,

quand x est compris entre $\frac{3}{4}$ et $\frac{7}{8}$, y est compris entre $\frac{3}{4}$ et $\frac{7}{16}$.

C'est pourquoi

$$g^{-1}\left(\left[\frac{7}{16}; \frac{3}{4}\right]\right) = \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}; \frac{7}{8}\right].$$