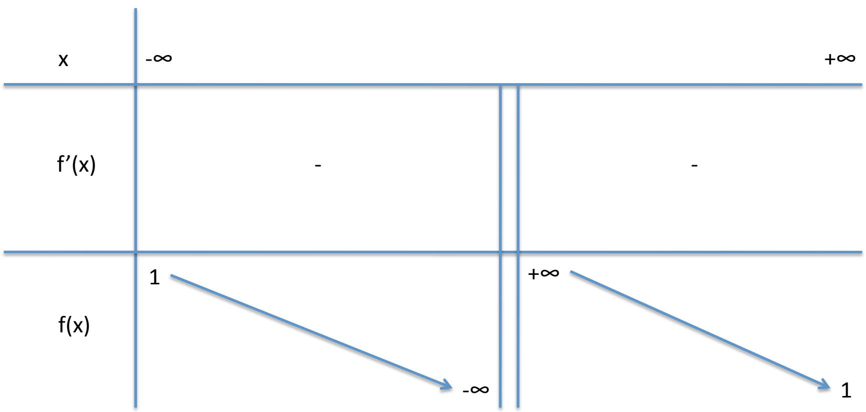
Test 2 corrigé

1) L'application $f : \mathbb{R} - 1 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ est-elle injective? surjective? bijective? (on pourra utiliser son tableau de variations)

Réponse: $f(x)$ n'est pas définie en $x = 1$. Sa dérivée $f'(x) = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$ est toujours négative.



Démontrons que f est injective.

On ne peut pas dire que f est décroissante: par exemple 0 est plus petit que 2 et $f(0) = -1$ est plus petit que $f(2) = 3$, ce qui donne l'impression que f est croissante. Mais en fait elle n'est ni décroissante ni croissante.

Soient deux réels différents $x_1 < x_2$.

S'ils sont de part et d'autre de 1 alors, d'après le tableau de variations, $f(x_1)$ est dans $]-\infty, 1[$ et $f(x_2)$ dans $]1, +\infty[$; ils sont donc différents.

Si x_1 et $x_2$sont dans le même intervalle, $]-\infty, 1[$ ou $]1, +\infty[$, $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont différents parce que f est décroissante sur cet intervalle.

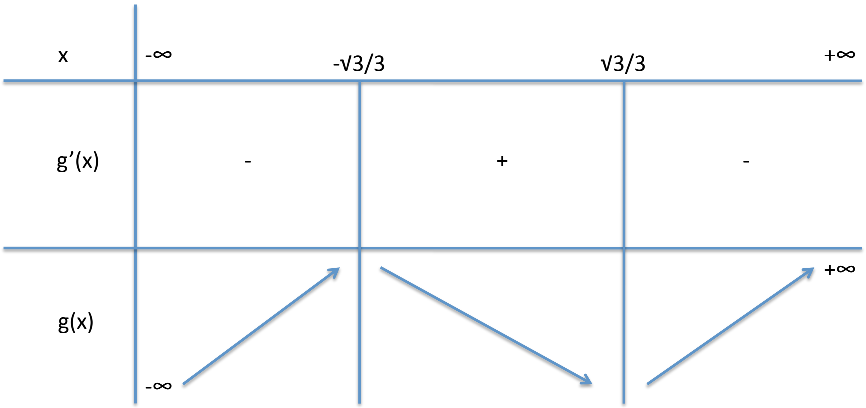
On conclut que f est injective.

f n'est pas surjective parce qu'il n'existe pas de x tel que $f(x) = 1$.

Elle n'est pas bijective: il faudrait qu'elle soit injective et surjective.

2) a) L'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^3 - x$ est-elle injective? surjective? bijective?

Réponse: La dérivée $g'(x) = 3x^2 - 1$ s'annule en $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, et elle est négative entre ces deux valeurs.



g n'est pas injective: $g(-1) = g(1)$ par exemple.

Démontrons que g est surjective. Sa limite quand x tend vers $-\infty$ est $-\infty$, et sa limite quand x tend vers $+\infty$ est $+\infty$. Elle prend donc toutes les valeurs intermédiaires entre $-\infty$ et $+\infty$, c'est à dire son ensemble image est $\mathbb{R}$, autrement dit g est surjective.

Elle n'est pas bijective: il faudrait qu'elle soit injective et surjective.

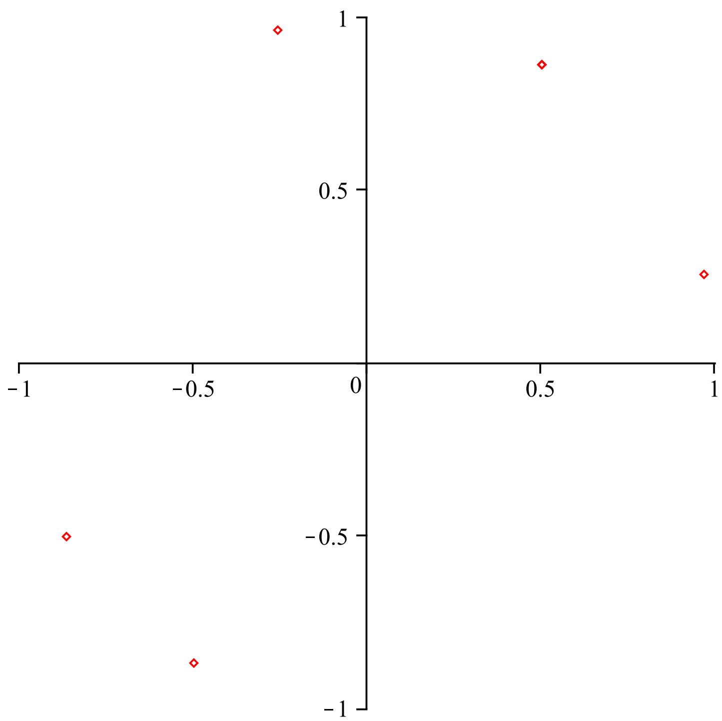
b) Déterminer $g^{-1}(\{0\})$ et $g^{-1}(\mathbb{R}^+)$.

Réponse: $g^{-1}(\{0\}) = \{-1, 0, 1\}$ *(ce sont les x tels que $g(x) = 0$).*

$g^{-1}(\mathbb{R}^+) = [-1, 0] \cup [1, +\infty[$ *(ce sont les x tels que $g(x) \in \mathbb{R}^+$).*

3) Représenter dans le plan les points $M_1, \ldots, M_6$ d'affixes $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{\pi}{12}}$, $e^{i\frac{7\pi}{12}}$, $1+e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$. Mettre sur le dessin la valeur des angles que font les vecteurs $\overrightarrow{OM_k}$ avec l'axe des x. Parmi ces nombres complexes, lesquels sont de module 1?

Réponse:



Les vecteurs $\overrightarrow{OM_k}$ *font les angles* $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}$ *avec l'axe des* x. *Ils sont tous de module 1.*

4) Soit $\zeta = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Démontrer que $\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5, \zeta^6, \zeta^7, \zeta^8$ sont les huit solutions de l'équation $z^8 - 1 = 0$, et les mettre sous la forme $x + iy$.

Réponse:

$$\begin{aligned}
\left(\rho e^{i\theta}\right)^8 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad & \rho^8 e^{8i\theta} = 1 \\
& \rho^8 = 1 \text{ et } 8\theta = 2k\pi \\
& \rho = 1 \text{ et } \theta = \frac{k\pi}{4} \\
& \rho e^{i\theta} = e^{i\frac{k\pi}{4}} \\
& \rho e^{i\theta} = \zeta^k.
\end{aligned}$$

En faisant successivement $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, *les huit solutions sont*

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$e^{i\frac{4\pi}{4}} = -1$$

$$e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$e^{i\frac{6\pi}{4}} = -i$$

$$e^{7i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$e^{i\frac{8\pi}{4}} = 1.$$