Test 4

1) Dériver les fonctions suivantes (1 point par dérivée)

$f(x) = x^3 \sin x,$

$g(x) = \dfrac{x^3}{\sin x},$

$h(x) = \sin(x^3),$

$k(x) = x^3 e^{\sin x},$

$\ell(x) = -(\ln x)^2 e^{\sin x}.$

$f'(x) = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x,$

$g'(x) = \dfrac{3x^2 \sin x - x^3 \cos x}{\sin^2 x},$

$h'(x) = 3x^2 \cos(x^3),$

$k'(x) = 3x^2\, e^{\sin x} + x^3 \cos x\, e^{\sin x},$

$\ell'(x) = -2\,\dfrac{\ln x}{x}\, e^{\sin x} - (\ln x)^2 \cos x\, e^{\sin x}.$

2) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ (sur 1 point).

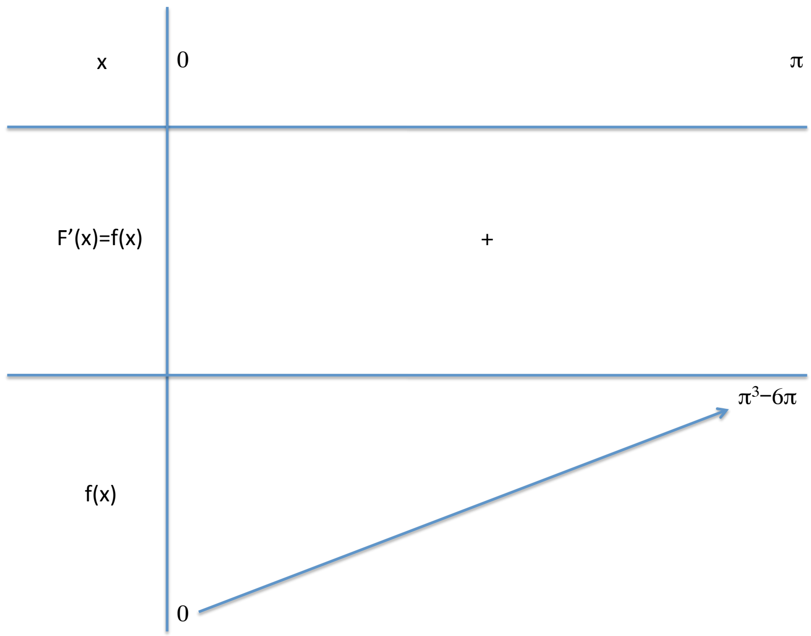
On résout $f(x) = 0$; on obtient $f^{-1}(\{0\}) = \{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

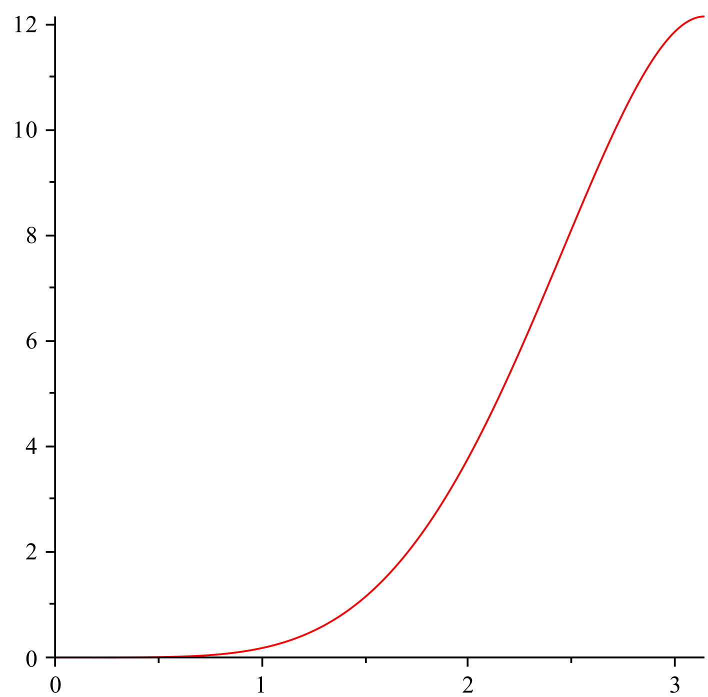
Pour $x \in [0;\pi]$, faire le tableau de variations et représenter l'allure de la courbe de la fonction

$$F(x) = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6 \sin x + 6x \cos x. \quad \text{(sur 2 points)}$$

La pente de la tangente en $x = 0$ est nulle. Pour avoir l'allure de la courbe il suffit de placer les points d'abscisse 0, $\dfrac{\pi}{2}$ et π c'est à dire les points de coordonnées $(0, F(0))$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ et $(\pi, F(\pi))$. (sur 2 points)

$F(0) = 0$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{3\pi^2}{4} - 6$ et $F(\pi) = \pi^3 - 6\pi$.





3) Soient E, F deux ensembles, soit $f : E \to F$ une fonction surjective, et soient A et B deux parties de E. On suppose que tout élément de E appartient à A ou B, pourquoi a-t-on $f(A) \cup f(B) = F$? (sur 2 points)

$f(A) \cup f(B)$ est inclus dans F parce que f est à valeurs dans F. De plus $f(A) \cup f(B)$ est égal à F parce que tout élément y de F a un antécédent x par la surjection f, et cet antécédent appartient à A ou B, ce qui fait que y appartient à $f(A)$ ou $f(B)$.