Test 4

1) Dériver les fonctions suivantes (1 point par dérivée)

$f(x) = x^2 \cos x,$

$g(x) = \dfrac{x^2}{\cos x},$

$h(x) = \cos(x^2),$

$k(x) = x^2 e^{\sin x},$

$\ell(x) = (\ln x)^2 e^{-\cos x}.$

$f'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x,$

$g'(x) = \dfrac{2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x},$

$h'(x) = -2x \sin(x^2),$

$k'(x) = 2x\, e^{\sin x} + x^2 \cos x\, e^{\sin x},$

$\ell'(x) = 2\, \dfrac{\ln x}{x}\, e^{-\cos x} + (\ln x)^2 \sin x\, e^{-\cos x}.$

2) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ (sur 1 point).

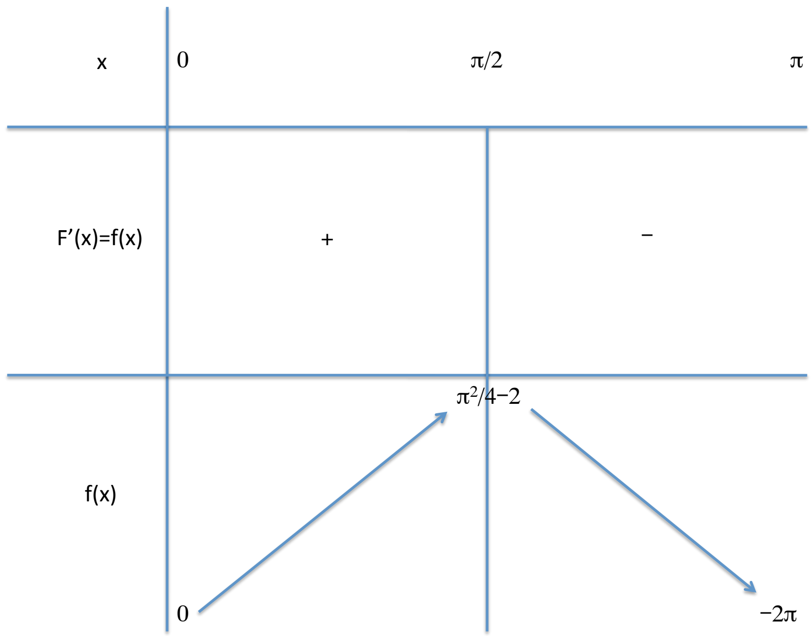
On résout $f(x) = 0$; on obtient $f^{-1}(\{0\}) = \{0\} \cup \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

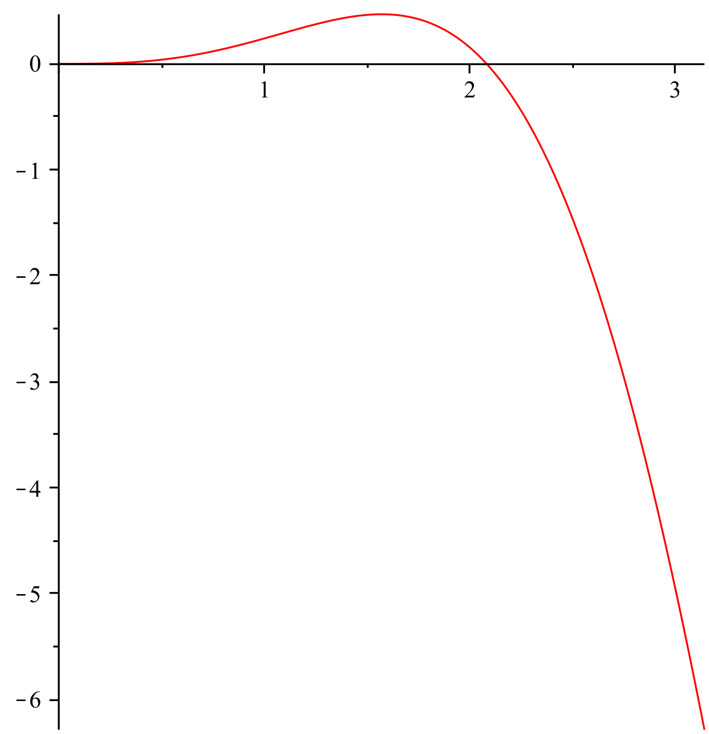
Pour $x \in [0; \pi]$, faire le tableau de variations et représenter l'allure de la courbe de la fonction

$$F(x) = x^2 \sin x - 2 \sin x + 2x \cos x. \quad \text{(sur 2 points)}$$

La pente de la tangente en $x = 0$ est nulle. Pour avoir l'allure de la courbe il suffit de placer les points d'abscisse 0, $\dfrac{\pi}{2}$ et π c'est à dire les points de coordonnées $(0, F(0))$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ et $(\pi, F(\pi))$. (sur 2 points)

$F(0) = 0$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{4} - 2$ et $F(\pi) = -2\pi$.





3) Soient E, F deux ensembles, soit $f : E \to F$ une fonction injective, et soient A et B deux parties de E d'intersection $A \cap B$ vide, pourquoi $f(A) \cap f(B)$ est-il vide ? (sur 2 points)

Si $f(A) \cap f(B)$ avait un élément y, cet élément aurait un antécédent $x_1 \in A$ et un autre antécédent $x_2 \in B$. Ils seraient distincts parce que A et B n'ont pas d'éléments communs. On en déduit $f(x_1) \neq f(x_2)$ parce que f est injective. Ça contredit les égalités $f(x_1) = y = f(x_2)$, donc cet élément y n'existe pas.