Université Aix-Marseille
Licence PC

13◁2◁2014

Test de mathématiques (ne compte pas)

---

1 Question de cours et questions courtes

a) Soit A,B,C trois points non alignés :
Comment calculer l'aire du parallélogramme $ABDC$, avec :
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$?
Calculer l'aire du triangle ABC.

Solution : L'aire du parallélogramme $ABDC$ est $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$ et l'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

b) Montrer que si $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$
sont orthogonaux, alors :
La norme du produit vectoriel est le produit des normes, soit :
$\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|$

Solution : $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|$.

c) Donner les solutions d'une équation différentielle du type :
$y" + ay = P(x)$
a étant un réel strictement positif et P(x) un polynôme de degré n.
On indiquera la méthode et la forme générale des solutions.

Solution : La solution générale de l'équation sans second membre étant $A\cos(x\sqrt{a}) + B\sin(x\sqrt{a})$, on détermine les coefficients d'un polynôme $Q(x)$ de degré n tel que $Q''(x) + aQ(x) = P(x)$. La solution générale de l'équation complète est alors $\boxed{y(x) = Q(x) + A\cos\left(x\sqrt{a}\right) + B\sin\left(x\sqrt{a}\right)}$.

2 Exercice produit vectoriel

Exercice 1 *a) Pour les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$, calculer la somme des carrés des aires des triangles OAB, OBC et OCA. Vérifier qu'elle est égale au carré de l'aire de ABC. Quelle est l'équation du plan contenant les points A, B et C ?*

Solution *: OAB est la moitié d'un carré de côté 1, son aire est donc $\frac{1}{2}$. De même pour OBC et OCA. La somme des carrés des aires vaut $\frac{3}{4}$.*

L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, l'aire du triangle ABC est donc $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et son carré est $\frac{3}{4}$.

b) A, B et C sont maintenant des points quelconques de l'espace, on suppose seulement que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux deux à deux. Démontrer que la somme des carrés des aires des triangles OAB, OBC et OCA est égale au carré de l'aire de ABC (indication : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}, \ldots$).

Solution *:*

$$\begin{aligned}
aire(ABC) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| &= \frac{1}{2}\left\|\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) \wedge \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}\right)\right\| \\
&= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}\right\|.
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{AO}$ est nul parce que le sinus de l'angle $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO})$ est $\sin(0) = 0$. D'autre part $\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}$ est la somme de trois vecteurs orthogonaux deux à deux, parce que $\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{OC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OB}$,

etc. Quand trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont orthogonaux deux à deux, $\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})$ est égal (en développant) à $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$. On a donc

$$\begin{aligned}(aire(ABC))^2 &= \frac{1}{4}\left(\left\|\overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{OC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{AO}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}\right\|^2\right)\\ &= (aire(OAB))^2 + (aire(OBC))^2 + (aire(OCA))^2 .\end{aligned}$$

3 Exercices équations différentielles

Exercice 2 *Résoudre l' équation différentielle :*
E_1 : $xy\prime + 3y = 0$, *avec* $y(2) = 1$
Solution : $y(x) = \frac{8}{x^3}$, $x \in]0; +\infty[$.

Exercice 3 *Résoudre les équations différentielles :*
a) $y\prime = -3y + e^{5x}$
Solution : $y(x) = Ke^{-3x} + \dfrac{1}{8}e^{5x}$.
b) $y" + y\prime + y = x^2$
Solution : $y(x) = x^2 - 2x + Ae^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Be^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.
c) $y" + 2y\prime - y = \sin x + \cos x$
Solution : $y(x) = -\dfrac{1}{2}\cos x + Ae^{(-1+\sqrt{2})x} + Be^{(-1-\sqrt{2})x}$.

Exercice 4 *La quantité u d'un élément radioactif est solution d'une équation differentielle de la forme :*

$$\frac{du}{dt} = -au.$$

a) Résoudre l' équation différentielle ;
Solution : $u(t) = Ke^{-at}$.
b) La demi-vie d'un élément est le temps qu'il faut attendre pour qu'une quantité de cet élément diminue de moitié : par exemple, la demi-vie de l'uranium 238 est de $4.5\ 10^4$ *ans ;*

1. *Calculer la constante a en fonction de la demi-vie.*

   Solution : *Comme* $K = u(0)$, *on résoud* $u(0)e^{-4.5\ 10^4 a} = \dfrac{u(0)}{2}$, *on obtient* $\boxed{a = \dfrac{\ln 2}{4.5\ 10^4}}$.

2. *Combien de temps faut-il attendre pour qu'une quantité d'uranium 238 diminue de un pour cent ?*

Solution : *Comme* $K = u(0)$, *on résoud* $u(0)e^{-\frac{\ln 2}{4.5\ 10^4}t} = \dfrac{99}{100}u(0)$, *on obtient* $\boxed{t = \dfrac{4.5\ 10^4}{\ln 2}\ln\left(\dfrac{100}{99}\right)}$.