Université de Provence 2008-2009
Semestre 1 Planche 12

Mathématiques générales 1

Équations différentielles du 2ème ordre

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''(x) - y(x) = 0$ sachant que $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.

b) $y''(x) - y(x) = e^{2x}$ sachant que $y(0) = y'(0) = 0$. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = Ae^{2x}$ où A est une constante.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$ sachant que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

b) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = xe^{4x}$ sachant que $y(0) = y'(0) = 0$. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = e^{4x}(Ax + B)$ où A, B sont des constantes.

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$ sachant que $y(0) = y'(0) = 1$.

b) $y''(x) + y'(x) + y(x) = \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ sachant que $y(0) = y'(0) = 1$. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ où A, B sont des constantes.

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''(x) + 4y(x) = 0$ sachant que $y(0) = y'(0) = 0$.

b) $y''(x) + 4y(x) = 0$ sachant que $y(1) = 1$ et $y'(1) = 2$.

c) $y''(x) + 4y(x) = \cos(2x)$ sachant que $y(0) = y'(0) = 0$. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = Ax\sin(2x)$ où A est une constante.

Exercice 5. Trouver toutes les solutions des équations différentielles suivantes, en cherchant une solution particulière de la forme $y(x) = P(x)$, où $P(x)$ est un polynôme.

a) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 2x^2 - 8x + 5$, où $P(x)$ est du deuxième degré.

b) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x^2$, où $P(x)$ est du deuxième degré.

Exercice 6.

a) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) + y'(x) = 1 + x^2 \tag{E_1}$$

en cherchant une solution particulière qui soit un polynôme du troisième degré.

b) On considère l'équation différentielle :

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = (x^2 + 1)e^{-x}. \tag{E_2}$$

Montrer que f est solution de (E_2) si et seulement si g est solution de (E_1) où g est défini par $g(x) = e^x f(x)$ pour tout x. Puis Trouver toutes les solutions de (E_2).

Exercice 7. Trouver toutes les solutions des équations différentielles suivantes, en cherchant une solution particulière de la forme $y(x) = P(x)e^{\lambda x}$, où $P(x)$ est un polynôme.

a) $y''(x) - 4y(x) = xe^{2x}$, avec $P(x)$ du deuxième degré et $\lambda = 2$.

b) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = xe^x$, avec $P(x)$ du troisième degré et $\lambda = 1$.

Exercice 8. On considère l'équation différentielle :

$$y''(x) + w^2 y(x) = 0 \tag{E}$$

où w est une constante.

Déterminer w afin qu'il existe une solution f à (E), non identiquement nulle, et telle que $f(0) = f(\pi) = 0$.

Exercice 9. Trouver toutes les solutions de :

a) $y''(t) - y(t) = 0$;

b) $2y''(t) + 3y'(t) + 4y(t) = 0$;

c) $y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 0$;

d) $y''(t) - 8y'(t) + 16y(t) = 0$.

Exercice 10. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 0$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

b) $y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 0$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$.

c) $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0$ sachant que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$.