Université de Provence
Licence de Mathématiques 2004-2005
M15 (Analyse 2)

TD 5 - Séries de Fourier

Exercice 1.

1. Montrer que si f est une fonction intégrable de période T alors, pour tout nombre réel a, on a :
$$\int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt.$$
2. Déterminer la propriété caractéristique des coefficients de Fourier a_n et b_n de f, si la fonction f est paire ou impaire.

Exercice 2.

Énoncer la règle de Dirichlet sur la convergence de la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique.

Exercice 3.

Calculer de deux manières différentes les coefficients de Fourier des fonctions f et g définies par :
$$f(x) = \sin^2(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \cos^3(x).$$

Exercice 4.

Soit f la fonction 2π-périodique définie par :
$$\forall x \in [0, 2\pi[, \quad f(x) = x^2.$$

1. Tracer le graphe de f.
2. Déterminer la série de Fourier de f.
3. Déterminer le domaine de convergence D de cette série et, pour tout x dans D, la valeur $S(x)$ de la somme de cette série.
4. Préciser sur quels intervalles cette série converge uniformément.
5. Déduire des calculs précédents la somme des séries :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Exercice 5.

Soit f la fonction 2π-périodique définie par :
$$\forall x \in [0, 2\pi[, \quad f(x) = x(2\pi - x).$$

1. Reprendre pour cette fonction les quatre premières questions de l'exercice 4.

2. En utilisant l'égalité de Parseval, calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 6.

On considère deux fonctions 2π-périodiques f et g vérifiant les conditions suivantes : f est impaire, g est paire et

$$\forall x \in]0, \pi], \quad f(x) = g(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

1. Reprendre pour ces fonctions les quatre premières questions de l'exercice 4 et comparer les résultats obtenus pour f et pour g.
2. Vérifier sur cet exemple que deux séries trigonométriques différentes peuvent converger uniformément vers la même fonction sur un intervalle non vide (ici on peut prendre $[a, \pi - a]$ où $a < \pi$). Comparer ce résultat avec celui de l'exercice 9.

Exercice 7.

Soit f la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si} \quad x \in [0, \pi[\\ 0 & \text{si} \quad x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

1. Tracer le graphe de la fonction f.
2. Déterminer la série de Fourier de f.
3. Déterminer le domaine de convergence D de cette série et, pour tout x dans D, la valeur $S(x)$ de la somme de cette série.
4. Etudier la convergence uniforme de la série.
5. Déduire des calculs précédents la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$.

Exercice 8. *(Séries de Fourier et l'équation d'ondes)*

Soient $f, g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $f(0) = f(\pi) = g(0) = g(\pi) = 0$. Considerons l'équation différentielle de la corde vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (CV)$$

avec les conditions initiales :

$$u(x, 0) = f(x) \ , \ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \ \forall x \in [0, \pi] \ , \qquad (CI)$$

et conditions à la frontière :

$$u(0, t) = 0 \ , \ u(\pi, t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}_+ \ . \qquad (CF)$$

1. Montrer que la fonction $u : [0, \pi] \times [0, \infty[$ donnée par
$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \sin(nx)(\beta_n \cos(nt) + \gamma_n \sin(nt))$$
est une solution de l'équation (CV) si les dérivées partielles formelles d'ordre 1 et 2 de cette série convergent uniformément sur $[0, \pi] \times [0, T]$ pour tout $T > 0$.
2. Soient $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ les extensions impaires 2π-périodiques de f et g. Préciser les rélations entre les constantes β_n, γ_n et les coefficients de Fourier de $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ pour que cette solution satisfasse aussi aux conditions (CI) et (CF).