Exercice 1.

Pour chacune des expressions de a_n ci-dessous, calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et déterminer l'intervalle sur lequel il y a convergence :

a) $a_n = 1$ b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ c) $a_n = (\ln n)^n$ d) $a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
e) $a_n = \frac{15n^2\sqrt{n} + 5n^2 + 3n + \sqrt{n} + 5}{\sqrt{n^8 + 8n\sqrt{n} + 7\sqrt{n} + 1}}$ f) $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Exercice 2.

Pour chacune des séries entières $\sum a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$ ci-dessous, déterminer le rayon de convergence en précisant chaque fois le critère utilisé.

a) $\sum z^n$ b) $\sum a^n z^n$, $a \in \mathbb{C}$, c) $\sum n! z^n$, d) $\sum \frac{z^n}{n!}$, e) $\sum \frac{a^n z^n}{n!}$, $a \in \mathbb{C}$,
f) $\sum (1 + \dots + (n+1))z^n$, g) $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$, h) $\sum \frac{n! z^n}{a^n}$, $a \in \mathbb{C}^*$,

Exercice 3.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

1. Montrer que s'il existe deux nombres complexes α et β de même module $\rho > 0$, tels que $\sum a_n \alpha^n$ converge et $\sum a_n \beta^n$ diverge, alors $R = \rho$. Cette propriété est-elle caractéristique du rayon de convergence ?
2. Montrer que si la suite $(a_n)_n$ ne converge pas vers 0, nécessairement $R \leq 1$. Peut-on affirmer que l'inégalité est stricte ?
3. Montrer que si la suite $(a_n)_n$ est bornée, nécessairement $R \geq 1$.
4. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum z^{n^2}$. Pouvait-on appliquer le critère de d'Alembert ?

Exercice 4.

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Montrer que s'il existe deux nombres réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leq a_n \leq \beta$, alors la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.
2. On considère la série entière $\sum z^{n^2}$. Mettre cette série sous la forme $\sum a_n z^n$ et déterminer son rayon de convergence.

Exercice 5.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $2^n z^n$, $(2^n - 1)z^n$,
2. la somme de $2^n z^n$ et de $(2^n - 1)z^n$,
3. la différence de $2^n z^n$ et de $(2^n - 1)z^n$,

Exercice 6.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

1. Déterminer en fonction de R le rayon de convergence des séries entières

$$\sum 5a_n z^n, \quad \sum na_n z^n, \quad \sum 3^n a_n z^n, \quad \sum a_n z^{2n}.$$

2. Calculer le rayon de convergence de $\sum 3^n n z^{2n}$.

Exercice 7.

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

$$\begin{aligned}
 & a) \sum_{n \geq 0} n x^n, \quad b) \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}, \quad c) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2+1}{n^2+3n+2} x^n, \quad d) \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n!} x^n, \\
 & e) \sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(2n)!}, \quad f) \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)x^n, \quad g) \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n, \quad h) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+3}}{4n+3}, \quad i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \\
 & j) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(2n)!}, \quad k) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+2+\dots+n}, \quad l) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}
 \end{aligned}$$

Exercice 8.

Exprimer l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+\frac{1}{2}t)}{t} dt$ comme la somme d'une série.

Exercice 9. (*Extrait de l'examen de septembre 1999.*)

On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^{2n+1}$, où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)}.$$

1. Déterminer son rayon de convergence R et vérifier que la série converge simplement sur $[-R, R]$. On note f sa somme.
2. Démontrer que f est dérivable sur $] -R, R[$ et que $f'(x) = x \arctan x$. En déduire $f(x)$ pour tout $x \in] -R, R[$ (par une intégration par parties).
3. Montrer que la série entière converge normalement sur $[-R, R]$. En déduire que f est continue sur $[-R, R]$.
4. Donner l'expression de f sur $[-R, R]$. Justifier la réponse.
5. Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}.$$

Exercice 10.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 11.

On considère la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

1. Déterminer son rayon de convergence R et calculer sa somme pour $|x| < R$.
2. Démontrer que la série entière converge pour $x = 1$, puis que $|R_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$, pour tout $x \in [0, 1]$, où R_n désigne le reste d'ordre n .
3. En déduire que la série converge uniformément sur $[0, 1]$.
4. Démontrer que $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Justifier votre réponse.
5. Démontrer que la série entière converge uniformément sur $[-1, 1]$.

Exercice 12. (*Développement en série entière*)

1. Calculer le développement en série entière en 0 de chacune des fonctions suivantes ; préciser le rayon de convergence.

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x-a} \quad (a \in \mathbb{R}^*), \quad f_2 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{2-9x^4}\right), \quad f_3 : x \mapsto \arctan \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

2. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 13. (*Résolution d'une équation différentielle linéaire*)

On cherche les solutions de l'équation différentielle

$$(x+1)y' + y = \frac{2}{(1-x)^2} \tag{1}$$

sur l'intervalle $I =]-1, 1[$.

1. Résoudre l'équation homogène sur I .
2. On va chercher une solution particulière de (1) sous la forme d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0. Rappeler la définition d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0.
3. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et que sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (1).
 - (a) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par les a_n .
 - (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression de a_n en fonction de a_0 .

4. Réciproquement, on fixe $a_0 \in \mathbb{R}$ et on suppose que les a_n sont donnés en fonction de a_0 par l'expression trouvée en 3.(b).
- Montrer que si deux séries entières $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$ ont même rayon de convergence R , et si leurs coefficients vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n c_n = 0$, alors la série entière $\sum (b_n + c_n) x^n$ a pour rayon de convergence R .
 - En déduire le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ selon la valeur de a_0 .
 - Déterminer la forme générale des solutions de (1) développables en série entière au voisinage de 0.
5. En déduire l'ensemble des solutions de (1) sur $] -1, 1[$.

Exercice 14. (*Extrait de l'examen de septembre 2004.*)

Soit l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y'' - 2xy' + (2 + x^2)y = 0 \quad (2)$$

1. Montrer que l'ensemble des solutions de (2) développables en série entière sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On note F cet espace.
- 2.i) Soit $y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence R . Montrer que $y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est solution de (2) si et seulement si $R > 0$, $a_0 = 0$ et les coefficients satisfont une relation de récurrence d'ordre 2 qu'on déterminera.
- ii) En déduire alors que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{2k+2} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_2, \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_1.$$

iii) En déduire que $y = a_1 f_1 + a_2 f_2$, où $f_1(x) = x \sin x$ et $f_2(x) = x \cos x$.

3. Etudier les rayons de convergence de y , f_1 et f_2 . En déduire que F est de dimension 2.
4. Prouver l'existence et l'unicité de la solution de (E) qui vérifie

$$y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = y''(0) = 1,$$

l'expliciter.

Exercice 15.

On considère l'équation différentielle $xy'' + 2y' + xy = 0$ (E). On cherche des solutions de la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- Ecrire les relations que satisfont les coefficients a_n .
- Démontrer que $a_1 = 0$ et en déduire que $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Calculer a_{2p} en fonction de a_0 .
- Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$. Calculer $x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et en déduire la valeur de $y(x)$ pour $x \neq 0$ en fonction de a_0 .
- On se propose de retrouver autrement ce résultat. Pour cela, on pose $z(x) = xy(x)$ où la fonction z est de classe C^∞ et vérifie $z(0) = 0$.
 - Démontrer que z est solution de l'équation $z'' + z = 0$.
 - Retrouver l'expression de $y(x)$ trouvée dans la troisième question.