Université de Provence 2005-2006

Licence MI - Algèbre linéaire 1 (UE 2-2) - 2ème session

CORRIGÉ

I. Soit f une application linéaire de E dans F, deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

a) Si $v_1, v_2, \dots, v_q \in E$, qu'appelle-t-on sous-espace vectoriel V_q engendré par $v_1, v_2, \dots, v_q$? En déduire une base de V_q lorsque $\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ est libre.

Réponse: Le sous-espace vectoriel (de E) engendré par $v_1, v_2, \dots, v_q$ est l'ensemble des vecteurs $v \in E$ pour lesquels il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_q v_q.$$

Si $\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ est libre alors c'est une base de V_q, puisque $\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ est libre et générateur de V_q.

b) Si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E

(i) Montrer que Imf, l'image de E par f, est le sous-espace engendré par $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$.

Réponse: Imf est l'ensemble des $f(v)$, pour $v \in E$. Comme $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E, alors E est égal à l'ensemble des $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ (pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$) et Im$f$ est l'ensemble des $f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n)$. En utilisant la linéarité de f on en déduit que Imf est l'ensemble des $\lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n)$, c'est à dire le sous-espace engendré par $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$.

(ii) On suppose f surjective et F, de dimension $p < n$, de base $\mathcal{B}_1 = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$. Montrer que f n'est pas injective.

On pose $f^{-1}(\{\varepsilon_1\}) = A_1, \dots, f^{-1}(\{\varepsilon_p\}) = A_p$.

Montrer que $A_i \neq \emptyset$; déterminer $A_i \cap A_j$ pour $i \neq j$.

On choisit $e'_1 \in A_1, \dots, e'_p \in A_p$, montrer que $\{e'_1, \dots, e'_p\}$ est une partie libre de E.

Réponse: On a supposé f surjective; si elle était aussi injective elle serait bijective et p serait égal à n.

A_i n'est pas vide parce que, f étant supposée surjective, le vecteur ε_i a au moins un antécédent par f. Par contre $A_i \cap A_j$ est vide (pour $i \neq j$): si un vecteur v appartenait à $A_i \cap A_j$ on aurait $f(v) = \varepsilon_i = \varepsilon_j$, alors le vecteur $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ (qui est une combinaison linéaire de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$) serait nul et par conséquent $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$ ne serait pas libre.

Supposons maintenant $\lambda_1 e'_1 + \cdots + \lambda_p e'_p = 0_E$ (vecteur nul de E), et déterminons les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

On a

$$f(\lambda_1 e'_1 + \cdots + \lambda_p e'_p) = f(0_E) = 0_F$$

et, comme f est linéaire,

$$\lambda_1 f(e'_1) + \cdots + \lambda_p f(e'_p) = 0_F.$$

Comme d'après l'énoncé les $f(e'_i)$ valent ε_i, et comme $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$ est libre, on en déduit que tous les λ_i sont nuls ce qui prouve que $\{e'_1, \ldots, e'_p\}$ est libre.

(iii) Énoncer le théorème de la base incomplète; en déduire une base $\mathcal{B}'$ de E, contenant $e'_1, \ldots, e'_p$.

Réponse: D'après le théoréme de la base incomplète, étant donné une partie libre de p vecteurs de E (avec $p < n$ =dim$E$), il existe $n - p$ vecteurs appartenant à une base donnée de E tels que l'ensemble de tous ces vecteurs forme une base de E.

Ici on peut donc trouver $e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-p}}$ (dans la base $\mathcal{B}$) tels que $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_p, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-p}}\}$ soit une base de E.

Application Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie, dans les bases canoniques, par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est surjective et déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ comme il est fait à la question b) iii).

Réponse: Appelons $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ celle de $\mathbb{R}^2$. L'application f est surjective si Imf est égal à $\mathbb{R}^2$, ce qui revient à dire qu'il est de dimension 2. Or il ne peut être que de dimension 0, 1 ou 2. Comme les vecteurs $f(e_1) = (1,1)$ et $f(e_2) = (1,-1)$ (= les deux premières colonnes de la matrice) sont visiblement linéairement indépendants, la dimension de Imf est 2 et f surjective.

On remarque que

$$\begin{array}{rclclclcl} f(e_1 + e_2) & = & f(e_1) + f(e_2) & = & (1,1) + (1,-1) & = & (2,0) & = & 2\varepsilon_1 \\ f(e_1 - e_2) & = & f(e_1) - f(e_2) & = & (1,1) - (1,-1) & = & (0,2) & = & 2\varepsilon_2. \end{array}$$

On peut donc poser $e'_1 = \dfrac{1}{2}(e_1 + e_2)$ et $e'_2 = \dfrac{1}{2}(e_1 - e_2)$, ces vecteurs vérifieront bien $f(e'_1) = \varepsilon_1$ et $f(e'_2) = \varepsilon_2$ c'est à dire $e'_1 \in A_1$ et $e'_2 \in A_2$. On complète par $e'_3 = e_3$, puis il suffit de vérifier que la famille $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est libre (sachant que toute famille de trois vecteurs libres, dans un espace vectoriel de dimension 3, forme une base).

II. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter, suivant la valeur des paramètres réels a, b, c, d, le système

$$(S)\begin{cases} x+y+z+t & = & a \\ x-y-z+t & = & b \\ -x-y+z+t & = & c \\ -3x+y-3z-7t & = & d \end{cases}$$

Réponse: Il s'agit d'appliquer la méthode du pivot puis de trouver la ou les solutions, c'est à dire la ou les quadruplets (x, y, z, t) qui vérifient les quatre équations; la réponse dépend des valeurs de $a, b, c, d,$.

La matrice du système:

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -1 & 1 & b \\ -1 & -1 & 1 & 1 & c \\ -3 & 1 & -3 & -7 & d \end{array}\right) & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L4 \end{array} \end{array}$$

se réduit en remplaçant d'abord la ligne L_2 par $L_2' = L_2 - L_1$, L_3 par $L_3' = L_3 + L_1$ et L_4 par $L_4' = L_4 + 3L_1$:

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 2 & 2 & c+a \\ 0 & 4 & 0 & -4 & d+3a \end{array}\right) & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2' \\ L_3' \\ L_4' \end{array} \end{array}$$

puis L_4' par $L_4'' = L_4' + 2(L_2' + L_3')$:

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 2 & 2 & c+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d+3a+2(b+c) \end{array}\right) & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2' \\ L_3' \\ L_4' \end{array} \end{array}$$

Cette dernière est la matrice du système d'équations

$$(S')\begin{cases} x+y+z+t & = & a \\ -2y-2z & = & b-a \\ 2z+2t & = & c+a \\ 0 = d+3a+2(b+c) \end{cases}$$

ce qui oblige à distinguer deux cas:

- *si $d + 3a + 2(b + c) \neq 0$ la quatrième équation ne peut pas être vérifiée, le système d'équations n'a pas de solution;*

- *si $d + 3a + 2(b + c) = 0$ la quatrième équation est vérifiée; le système d'équations a une infinité de solutions qui sont les quadruplets*

$$(x, y, z, t) = \left(\frac{a+b}{2} - t, t - \frac{b+c}{2}, -t + \frac{c+a}{2}, t\right) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, 0\right) + t(-1, 1, -1, 1)$$

avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque.

III. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, dans la base canonique, est

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Trouver les deux valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe un vecteur v non nul vérifiant $f(v) = \lambda v$.

Indication: on pourra échanger la $1^{\text{ére}}$ et la $3^{\text{ième}}$ ligne du système obtenu.

Réponse: Pour déterminer $f(v)$, on appelle (x, y, z) le vecteur v et on calcule le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y+z \\ x-y+z \\ x+y-z \end{pmatrix}$$

donc $f(v) = f(x, y, z) = (-x+y+z, x-y+z, x+y-z)$. L'équation $f(v) = \lambda v$ équivaut au système d'équations

$$(S_\lambda) \qquad \begin{cases} -x+y+z &= \lambda x \\ x-y+z &= \lambda y \\ x+y-z &= \lambda z \end{cases}$$

c'est à dire (en faisant passer λx, λy et λz au premier membre puisque x, y et z sont les inconnues)

$$\begin{cases} (-\lambda-1)x+y+z &= 0 \\ x+(-\lambda-1)y+z &= 0 \\ x+y+(-\lambda-1)z &= 0 \end{cases}$$

dont la matrice est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\lambda-1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda-1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

qui se réduit en permutant les lignes 1 et 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\lambda-1 & 0 \\ 1 & -\lambda-1 & 1 & 0 \\ -\lambda-1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1' = L_3 \\ L_2' = L_2 \\ L_3' = L_1 \end{array}$$

puis en remplaçant la ligne L_2' par $L_2'' = L_2' - L_1'$ et la ligne L_3' par

$L_3'' = L_3' + (\lambda+1)L_1'$:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & -\lambda-2 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & -\lambda(\lambda+2) & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} L_1' \\ L_2'' \\ L_3'' \end{array}$$

et en remplaçant la ligne L_3'' par $L_3''' = L_3'' + L_2''$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & -\lambda-2 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & (-\lambda+1)(\lambda+2) & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1' \\ L_2'' \\ L_3''' \end{array}$$

Ce système admet d'autres solutions que la solution $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ à condition qu'au moins un des termes diagonaux soit nul, c'est à dire que λ vaut 1 ou -2. Donc dans ces deux cas il existe un vecteur non nul $v = (x, y, z)$ tel que $f(v) = \lambda v$

b) Pour chaque valeur λ trouvée, choisir, pour l'une, un vecteur ε_1 et, pour l'autre, deux vecteurs ε_2 et ε_3 tels que $B = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Réponse: Résolvons le système réduit après y avoir remplacé λ par 1:

$$\begin{array}{lcl} x+y-2z & = & 0 \\ -3y+3z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

ce qui équivaut à $x = y = z$, c'est à dire $z \in \mathbb{R}$ quelconque et $(x, y, z) = (z, z, z)$. On choisit une solution qu'on appelle ε_1: on pose $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$.

Résolvons le à nouveau après y avoir remplacé λ par -2:

il ne reste qu'une seule équation qui est $x + y + z = 0$. Ça veut dire qu'on peut prendre (par exemple) y et z quelconques, et que x vaut $-y - z$ donc

$$(x, y, z) = (-y - z, y, z).$$

On choisit, parmi ces vecteurs, deux vecteurs linéairement indépendants par exemple

$$\varepsilon_2 = (-1, 1, 0) \quad (\text{avec } y = 1 \text{ et } z = 0) \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = (-1, 0, 1) \quad (\text{avec } y = 0 \text{ et } z = 1)$$

puis on verifie que les trois vecteurs choisis forment un système libre (un système libre de trois vecteurs formant une base, dans un espace vectoriel de dimension 3).

c) Calculer $D = Mat(f, B, B)$.

Réponse: On a trouvé les vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ en résolvant l'équation $f(v) = \lambda v$ dans le cas où λ vaut 1 ou -2. On a donc

$$\begin{array}{lclcl} f(\varepsilon_1) & = & \lambda_1\varepsilon_1 & = & 1\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3 \\ f(\varepsilon_2) & = & \lambda_2\varepsilon_2 & = & 0\varepsilon_1 + (-2)\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3 \\ f(\varepsilon_3) & = & \lambda_3\varepsilon_3 & = & 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + (-2)\varepsilon_3 \end{array}$$

et donc la matrice de f dans la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

IV. Soit l'espace vectoriel $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dans E, on considère les nombres réels $r_1, \ldots, r_n$ et les fonctions f_k définies pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f_k(x) = e^{r_k x}$.

Montrer que le système $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est libre si et seulement si $r_1, \ldots, r_n$ sont distincts deux à deux.

(On raisonnera par récurrence; on sera amené à écrire $\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; on divisera par $f_n(x)$ et dérivera.

Réponse: On cherche les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ soit la fonction nulle. Divisons cette fonction par f_n; on obtient (en utilisant les propriétés de l'exponentielle)

$$0 = \frac{1}{f_n(x)}(\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x)) = \lambda_1 e^{(r_1 - r_n)x} + \cdots + \lambda_n e^{(r_n - r_n)x}. \qquad (*)$$

Remarquons que la dernière exponentielle vaut 1, puisque $r_n - r_n = 0$. La dérivée du dernier terme sera donc nulle. On obtient

$$0 = \lambda_1 (r_1 - r_n) e^{(r_1 - r_n)x} + \cdots + \lambda_{n-1}(r_{n-1} - r_n) e^{(r_{n-1} - r_n)x}$$

et, en multipliant par $e^{r_n x}$,

$$0 = \lambda_1 (r_1 - r_n) e^{r_1 x} + \cdots + \lambda_{n-1}(r_{n-1} - r_n) e^{r_{n-1} x}. \qquad (**)$$

La récurrence fonctionne: si on suppose que $\{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ est libre, alors $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont nuls d'après $(**)$ (à condition que les $r_k - r_n$ ne soient pas nuls), d'où on déduit que λ_n aussi est nul d'après $(*)$, et donc $\{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ est libre.

Réciproquement si parmi les coefficients r_k deux d'entre eux sont égaux, $r_k = r_h$, alors $f_k - f_h$ est la fonction nulle, donc $\{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ n'est pas libre.