Université de Provence 2005–2006

Corrigé analyse 2 - 1ère session

Mai 2006

Questions de cours

1) Donner la définition de la convergence normale d'une série de fonctions.

Σf_n converge normalement si $\Sigma||f_n||$ converge, avec $||f_n|| = \sup_{x\in\mathcal{D}_f} |f(x)|$.

2) Enoncer le théorème de Bessel–Parseval.

Si $|f|^2$ est intégrable alors $\frac{1}{2\pi}\int |f|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$.

Ex. 1

On considère la série de fonctions de terme général défini sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{n(1+ne^x)}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note f sa somme : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

C'est parce qu'elle est plus petite que $\frac{x}{n^2 e^x}$, où $\frac{x}{e^x}$ joue le rôle d'une constante (pour la convergence simple).

2. Montrer que, pour tout constante M, il existe une constante K telle que si $|x| < M$, alors $|f_n'(x)| \leq \frac{K}{n^2}$. Conclure que la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tous les segments de $\mathbb{R}$.

$f_n'(x) = \dfrac{1 + n(1-x)e^x}{n(1+ne^x)^2}$. On majore d'abord la valeur absolue du numérateur par $1 + ne^x + nxe^x$. En majorant le 1 du numérateur par n et en minorant celui du dénominateur par 0 on obtient $|f_n'(x)| \leq \dfrac{n + ne^x + nxe^x}{n^3 e^{2x}} = \dfrac{e^{-2x} + e^{-x} + xe^{-x}}{n^2}$. Il ne reste plus qu'à majorer $e^{-2x} + e^{-x} + xe^{-x}$ par son maximum pour $x \in [-M, M]$, pour en déduire la convergence normale de $\sum f_n'$ sur ce segment, d'où la convergence uniforme.

3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Se déduit des résultats des questions 1. et 2., par le théorème de dérivation des séries.

4. a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ et tout entier $n \geq 1$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x}{n^2 e^x}$.

b) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

La majoration s'obtient en minorant le dénominateur de $f_n(x)$ par $n^2 e^x$. On en déduit que $f(x)$ est compris entre 0 et $\frac{x}{e^x}$ fois la somme de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, d'où sa limite nulle quand $x \to +\infty$ (e^x l'emporte sur x).

5. a) Soit $x < 0$; montrer que $\frac{1}{n} \geq \frac{f_n(x)}{x} \geq \frac{1}{2n}$ pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq e^{-x}$.

b) En déduire le comportement de $f(x)/x$ quand x tend vers $-\infty$.

L'encadrement demandé provient de $0 \leq ne^x \leq 1$.
Il faut écrire $f(x)/x$ sous la forme de la somme de deux sommes :

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n\leq e^{-x}} \frac{1}{n(1+ne^x)} + \sum_{n>e^{-x}} \frac{1}{n(1+ne^x)}.$$

La première est comprise entre la somme des $\frac{1}{2n}$ et celle des $\frac{1}{n}$; mais comme on somme pour $1 \leq n \leq e^{-x}$, l'équivalent (connu) de cette somme partielle de Riemann est $\log(e^{-x}) = -x$. Comme d'autre part la deuxième somme est plus petite que $\sum_{n>e^{-x}} \frac{1}{n^2 e^x}$ c'est à dire $\frac{1}{e^x}$ fois le reste de la somme de Riemann en $\frac{1}{n^2}$, qui (au rang e^{-x}) est équivalent à $\frac{1}{e^{-x}} = e^x$, on conclut que $\frac{f(x)}{x}$ est asymptotiquement compris entre $-\frac{x}{2}$ et $-x$.

Ex. 2

Pour tout entier $n \geq 3$, définissions la fonction f_n en posant $f_n(x) = \frac{x^n}{(n+1)(n-2)}$.

a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur $[-1, 1]$.

b) Vérifier que $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2} = -x^2 \log(1-x)$ pour $|x| < 1$.

c) Vérifier que $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = -\frac{1}{x}\log(1-x) - 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}$ quand $|x| < 1$ et $x \neq 0$.

d) Calculer $\lim_{x\to1}(1-x)\log(1-x)$.

e) Calculer $\sum_{n=3}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$ (noter que $(1-x^3) = (1+x+x^2)(1-x)$).

$|f_n|$ est inférieur à $\frac{1}{(n+1)(n-2)}$ qui est équivalent à $\frac{1}{n^2}$, d'où la convergence normale.

Les relations du b) et c) proviennent du développement en série $-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

On sait que la limite de $t\log(t)$ est nulle quand t tend vers 0.

Faisons la différence de la somme du b) et de celle du c) ; on obtient 3 fois la somme $\sum_{n=3}^{\infty} f_n(x)$, et cette dernière vaut donc

$$\left(\frac{1}{3x} - \frac{x^2}{3}\right)\log(1-x) + \frac{1}{3} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{9}.$$

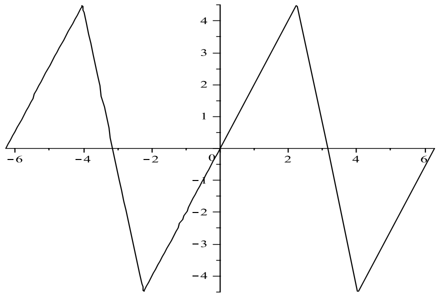
Valable aussi pour $x = -1$ ou 1 (par passage à la limite).

Ex. 3

Soient $a, b > 0$. On pose $c = \frac{b}{a+b}\pi$.

On considère la fonction f, 2π périodique, impaire qui vaut $f(x) = \min(ax; b(\pi - x))$ pour tout $x \in [0, \pi]$.

1) Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$. Indiquer les points de **non**–continuité et de **non**–dérivabilité.



Continue en tout point mais pas dérivable en $x = \pm c$ modulo 2π.

2) Que peut-on dire de la convergence de la série de Fourier de f ?

Converge uniformément vers f, puisque continue et dérivable par morceaux.

3) Calculer les coefficients de la série de Fourier de f.

Les a_n sont nuls ; les b_n valent $2\frac{a+b}{a\pi}\frac{\sin(\frac{b}{a+b}n\pi)}{n^2}$.

4) En déduire que pour tout $x \in [0, c]$

$$x = 2\frac{a+b}{a\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(\frac{b}{a+b}n\pi)}{n^2}\sin(nx)$$

C'est parce que $f(x) = x$.