Université de Provence 2005-2006

Licence MI - Algèbre linéaire 1 (UE 2-2) - $1^{\text{ère}}$ session

CORRIGÉ

I

1) Soit $n \geq 1$ et f l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ linéaire et non identiquement nulle.

a) L'application f est -elle surjective? *(sur 2 pts)*

Réponse: Il faut d'abord remarquer que $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ est de dimension 1. Puis, dire que f est surjective ssi Im$f = \mathbb{R}$. Mais Imf est toujours un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, il est donc égal à $\mathbb{R}$ (si dim(Imf) $= 1$) et à $\{0\}$ (si dim(Imf) $= 0$). Mais l'énoncé précise que f n'est pas l'application identiquement nulle, donc Im$f = \mathbb{R}$ et f est surjective.

b) L'application f est -elle injective? *(sur 2 pts)*

Réponse: Elle est injective ssi Ker$f = \{0\}$ c'est à dire dim(Ker$f$) $= 0$. Mais d'après le théorème noyau-image

$$\textit{dim}(\textit{Ker}f) = \textit{dim}(\mathbb{R}^n) - \textit{dim}(\textit{Im}f) = n - 1.$$

On conclut que f est injective ssi $n = 1$.

2) a) f peut-elle être représentée par deux matrices différentes? *(sur 1 pts)*

Réponse: Oui, dans deux couples de bases différents.

b) Si pour tout $b \in \mathbb{R}^p$ il existe un unique $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = b$, que peut-on dire de f, n et p? *(sur 3 pts)*

Réponse: f est bijective et $n = p$.

3) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que la famille de vecteurs $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est libre si et seulement si la famille de vecteurs $(v_1', v_2, \ldots, v_n)$ est libre, où $v_1' = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$ avec $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. *(sur 3 pts)*

Réponse: On suppose que $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est libre; il s'agit de trouver tous les réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que $\alpha_1 v_1' + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$. Ceci équivaut à

$$\alpha_1(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

c'est à dire à

$$\alpha_1\lambda_1 v_1 + (\alpha_1\lambda_2 + \alpha_2)v_2 + \cdots + (\alpha_1\lambda_n + \alpha_n)v_n = 0$$

et, compte tenu que $(v_1, \dots, v_n)$ *est libre,*

$$\begin{cases} \alpha_1\lambda_1 & = & 0 \\ \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2 & = & 0 \\ \dots & & \\ \alpha_1\lambda_n + \alpha_n & = & 0 \end{cases}$$

La première équation a pour solution unique $\alpha_1 = 0$ *(compte tenu que* $\lambda_1 \neq 0$ *d'après l'énoncé). Il s'ensuit que les équations suivantes ont pour solutions uniques* $\alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$, *donc* $(v'_1, v_2, \dots, v_n)$ *est libre.*

La réciproque se démontre de la même façon, puisque $v_1 = \dfrac{1}{\lambda_1}v'_1 + \dfrac{-\lambda_2}{\lambda_1}v_2 + \cdots + \dfrac{-\lambda_n}{\lambda_1}v_n$ *est une combinaison linéaire de* $v'_1, v_2, \dots, v_n$.

II

Résoudre le système (S) en fonction de c et γ

$$(S) \begin{cases} 2x + y - z & = & 0 \\ x + y + z & = & 1 \\ x + cz & = & \gamma \end{cases}$$

(sur 2+1+2 pts)

Réponse: Il s'agit d'appliquer la méthode du pivot (sur 2 pts) puis de trouver la ou les solutions (sur 2 pts), c'est à dire la ou les triplets (x, y, z) *qui vérifient les trois équations; la réponse dépend des valeurs de* c *et* γ *(sur 1 pt).*

La matrice du système:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & \gamma \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

se réduit en remplaçant la ligne L_2 *par* $L'_2 = 2L_2 - L_1$ *et la ligne* L_3 *par* $L'_3 = L_3 + L_2 - L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & c+2 & \gamma+1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \end{array}$$

Cette dernière est la matrice du système

$$(S') \begin{cases} 2x + y - z & = & 0 \\ y + 3z & = & 2 \\ (c+2)z & = & \gamma + 1 \end{cases}$$

ce qui oblige à distinguer trois cas:

• *si* $c+2$ *et* $\gamma+1$ *sont non nuls, la solution unique est le triplet* (x, y, z) *tel que* $z = \dfrac{\gamma+1}{c+2}$, $y = 2 - 3\dfrac{\gamma+1}{c+2}$ *et* $x = -1 + 2\dfrac{\gamma+1}{c+2}$;

• *si $c+2$ est nul mais pas $\gamma+1$, il n'y a pas de solution puisque la dernière équation de (S') est dans ce cas $0z=\gamma+1$;*

• *si $c+2=\gamma+1=0$, la dernière équation de (S') est $0z=0$ et elle est vérifiée par tous les réels z; le système (S) a une infinité de solutions qui sont les triplets*

$$(x,y,z)=(-1+2z,2-3z,z)=(-1,2,0)+z(2,-3,1)$$

avec z quelconque.

III

Soient a,b et c des réels distincts deux à deux, montrer que l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

est un automorphisme. *(sur 3 pts)*

Réponse: Automorphisme signifie endomorphisme bijectif. Or f est un endomorphisme, et pour savoir s'il est bijectif on peut utiliser le résultat de la question 2b: il s'agit de savoir si pour tout $(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3$ il existe un unique $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $f(x,y,z)=(X,Y,Z)$. Pour déterminer $f(x,y,z)$ on calcule le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+ay+a^2z \\ x+by+b^2z \\ x+cy+c^2z \end{pmatrix}$$

donc $f(x,y,z)=(x+ay+a^2z,\ x+by+b^2z,\ x+cy+c^2z)$. L'équation $f(x,y,z)=(X,Y,Z)$ qu'on veut résoudre, équivaut au système d'équations

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+ay+a^2z & = & X \\ x+by+b^2z & = & Y \\ x+cy+c^2z & = & Z \end{array}\right.$$

de matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & X \\ 1 & b & b^2 & Y \\ 1 & c & c^2 & Z \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

qui se réduit en remplaçant la ligne L_2 par $L_2'=L_2-L_1$ et la ligne L_3 par $L_3'=(L_3-L_1)-\dfrac{c-a}{b-a}(L_2-L_1)$ (faire ces opérations en deux ou trois étapes):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & X \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & Y-X \\ 0 & 0 & c^2-a^2-(c-a)(b+a) & Z-X-\dfrac{c-a}{b-a}(Y-X) \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ L_2' \\ L_3' \end{array}$$

Compte tenu que les éléments diagonaux (c'est à dire 1, $b-a$ et $c^2-a^2-(c-a)(b+a) = (c-a)(c+a-b-a) = (c-a)(c-b)$) sont non nuls d'après l'énoncé, le système est de Cramer et admet une solution unique, ce qui prouve que f est un automorphisme.

IV

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, dans la base canonique, est

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Trouver les trois valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe un vecteur v non nul vérifiant $u(v) = \lambda v$. *(sur 3 pts)*

Réponse: Pour déterminer $u(v)$, on appelle (x, y, z) le vecteur v et on calcule le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+4z \\ 3x-4y+12z \\ x-2y+5z \end{pmatrix}$$

donc $u(v) = u(x, y, z) = (2x+4z,\ 3x-4y+12z,\ x-2y+5z)$. L'équation $u(v) = \lambda v$ équivaut au système d'équations

$$(S_\lambda) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} 2x+4z & = & \lambda x \\ 3x-4y+12z & = & \lambda y \\ x-2y+5z & = & \lambda z \end{array} \right.$$

c'est à dire (en faisant passer λx, λy et λz au premier membre puisque x, y et z sont les inconnues)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (2-\lambda)x+4z & = & 0 \\ 3x-(4+\lambda)y+12z & = & 0 \\ x-2y+(5-\lambda)z & = & 0 \end{array} \right.$$

dont la matrice est

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -4-\lambda & 12 & 0 \\ 1 & -2 & 5-\lambda & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

qui se réduit en permutant les lignes 1 et 3:

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & -4-\lambda & 12 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} L_1' = L_3 \\ L_2' = L_2 \\ L_3' = L_1 \end{array} \end{array}$$

puis en remplaçant la ligne L_2' par $L_2'' = L_2' - 3L_1'$ et la ligne L_3' par

$L_3'' = (L_3' - (2-\lambda)L_1') - 2(L_2' - 3L_1')$ (faire ces opérations en deux ou trois étapes):

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -3+3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-(2-\lambda)(5-\lambda)+6(1-\lambda) & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} L_1'' \\ L_2'' \\ L_3'' \end{array} \end{array}$$

Ce système admet d'autres solutions que la solution $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ *ssi au moins un des termes diagonaux est nul. Le troisième terme diagonal vaut, après simplification,* $\lambda - \lambda^2 = \lambda(1 - \lambda)$ *donc, pour répondre à la question, on conclut que* λ *vaut 0, 1 ou 2 (condition pour qu'au moins un des termes diagonaux soit nul et pour que l'équation* $u(v) = \lambda v$ *admette une solution* $v \neq 0$*).*

b) Pour chaque valeur $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, **choisir un vecteur respectif** $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ **tel que** $B = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ **forme une base de** $\mathbb{R}^3$**.** *(sur 3 pts)*

Réponse: On appelle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *les trois valeurs de* λ *qu'on a trouvées à la question précédente, et on choisit comme vecteurs* $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ *les solutions du système d'équations* (S_λ) *pour chacune de ces trois valeurs. On résoud donc le système réduit qui, d'après la question précédente, est*

$$\begin{array}{lcl} x - 2y + (5 - \lambda)z & = & 0 \\ (2 - \lambda)y + (-3 + 3\lambda)z & = & 0 \\ (\lambda - \lambda^2)z & = & 0 \end{array}$$

ce qui donne comme solutions

- $(x, y, z) = \left(-2z,\ \dfrac{3}{2}z,\ z\right)$ *dans le cas* $\lambda = \lambda_1 = 0$
- $(x, y, z) = (-4z, 0, z)$ *dans le cas* $\lambda = \lambda_2 = 1$
- $(x, y, z) = (2y, y, 0)$ *dans le cas* $\lambda = \lambda_3 = 2$

où on peut donner à y *et* z *n'importe quelle valeur réelle (non nulle si on veut avoir une chance que les vecteurs obtenus forment une base). Comme l'énoncé demande de choisir* $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, *on remplace* y *et* z *par 1 dans ces solutions, d'où*

$$\epsilon_1 = \left(-2, \frac{3}{2}, 1\right), \quad \epsilon_2 = (-4, 0, 1), \quad \epsilon_3 = (2, 1, 0)$$

et il ne reste plus qu'à verifier que ces trois vecteurs forment un système libre (un système libre de trois vecteurs, dans un espace vectoriel de dimension 3, forme une base).

c) Calculer $D = Mat(u, B, B)$**.** *(sur 1 pt)*

Réponse: On a trouvé les vecteurs $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ *en résolvant l'équation* $u(v) = \lambda v$ *dans le cas où* λ *vaut* $\lambda_1 = 0$ *ou* $\lambda_2 = 1$ *ou* $\lambda_3 = 2$*. On a donc*

$$\begin{array}{lclcl} u(\epsilon_1) & = & \lambda_1\epsilon_1 & = & 0\epsilon_1 + 0\epsilon_2 + 0\epsilon_3 \\ u(\epsilon_2) & = & \lambda_2\epsilon_2 & = & 0\epsilon_1 + 1\epsilon_2 + 0\epsilon_3 \\ u(\epsilon_3) & = & \lambda_3\epsilon_3 & = & 0\epsilon_1 + 0\epsilon_2 + 2\epsilon_3 \end{array}$$

ce qui fait que la matrice de u *dans la base* $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ *est* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.