Corrigé - Calcul différentiel 1 (14 mai 2008)

Exercice 1

La fonction f définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (pour $(x, y) \neq (0, 0)$) est-elle continue en $(0, 0)$? différentiable en $(0, 0)$? de classe C^1 ?

Elle est continue en $(0, 0)$ à cause de la majoration $|f(x, y)| \leq x^2 + y^2$.

Elle est différentiable en $(0, 0)$ avec des dérivées partielles nulles parce que $\left| \frac{f(x, y)}{\|(x, y)\|} \right|$ c'est à dire $\left| \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|$ est majoré par $\sqrt{x^2 + y^2}$ qui tend vers 0.

Par contre elle n'est pas de classe C^1 : si elle l'était, sa dérivée partielle par rapport à x serait continue, or cette dérivée partielle vaut (en $(x, 0)$ avec $x > 0$)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

qui n'a pas de limite quand x tend vers 0 (à cause du $\cos \frac{1}{x}$).

Exercice 2

Fonctions $f(u, v) = \sin(u^2 + v^2)$ et $g(x, y) = (x + y, x - y)$.

1. Dérivées partielles et différentielle de $f \circ g$?

$4x \cos(2x^2 + 2y^2)$, $4y \cos(2x^2 + 2y^2)$ et $4x \cos(2x^2 + 2y^2)h + 4y \cos(2x^2 + 2y^2)k$.

2. Matrices jacobiniennes de f et de g ? Retrouver les dérivées partielles de $f \circ g$.

La matrice $\begin{pmatrix} 2u \cos(u^2 + v^2) & 2v \cos(u^2 + v^2) \end{pmatrix}$ et la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On retrouve les dérivées partielles en faisant le produit de ces deux matrices.

Exercice 3

Équation aux dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = g(x, y)$ (avec $x + y > 0$).

1. (a) Cas $g = 0$: montrer que les solutions sont les fonctions $u(x, y) = h(x + y)$ avec h de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Les $h(x + y)$ sont solutions puisque $\frac{\partial}{\partial x}(h(x + y)) = \frac{\partial}{\partial y}(h(x + y)) = h'(x + y)$. Réciproquement si u est solution, il suffit de dériver la fonction $u(x, C - x)$ (avec C constante) pour s'apercevoir que cette fonction est constante, donc $u(x, C - x) = u(C, C - C) = u(C, 0)$ pour tout $C \in \mathbb{R}^{+*}$ ce qui fait (en remplaçant C par $x + y$) :

$u(x, y) = u(x + y, 0) =$ une fonction de $x + y$, qu'on appelle $h(x + y)$.

(b) Cas $g(x, y) = f(x) \cdot k(x + y)$. Montrer que si f_1 est une primitive de f , alors $f_1(x) \cdot k(x + y)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles. Trouver une solution si $g(x, y) = f(y) \cdot k(x + y)$.

La dérivée partielle de $f_1(x) \cdot k(x + y)$ par rapport à x est $f_1(x) \cdot k(x + y) + f_1'(x) \cdot k(x + y)$. Sa dérivée partielle par rapport à y est $f_1(x) \cdot k'(x + y)$, elle vérifie donc bien l'équation si $g(x, y) = f(x) \cdot k(x + y)$. Par contre si $g(x, y) = f(y) \cdot k(x + y)$ il faut prendre $u(x, y) = -f_1(y) \cdot k(x + y)$.

Questions "bonus".

2. Cas $g_0(x, y) = \frac{\sqrt{x + y}}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$. Mettre d'abord cette fonction sous la forme

$$\phi(x + y) \left(\frac{Ax + By}{1 + y^2} + \frac{Cx + Dy}{1 + x^2} \right).$$

En effet elle est égale à $\frac{\sqrt{x + y}}{(x + y)^3 + 4(x + y)} \left(\frac{x + 3y}{1 + y^2} + \frac{3x + y}{1 + x^2} \right)$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation aux dérivées partielles.

$u(x, y) = \frac{\log(1 + x^2) - \log(1 + y^2) + (x + y)(\arctan x - \arctan y)}{(x + y)^2 + 4} + h(x + y)$ (quelle que soit la fonction h de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$).