

Université de Provence
Licence de Mathématiques 2004-2005
M15 (Analyse 2)

TD 2 : SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1.

On considère la série numérique de terme général u_n et on note s_n la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de $\sum u_n$. Dans chacun des cas suivants :

- a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$;
- b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$;
- c) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = z^n$ où $z \in \mathbb{C}$;
- d) $u_n = e^n$ si $n \leq p$ et $u_n = 0$ sinon, où $p \in \mathbb{N}$ est fixé,

calculer s_n et en déduire la nature de $\sum u_n$. Calculer, lorsqu'elle existe, la somme de la série.

Solution : $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ dans cet exercice (mais $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$ si la suite n'est définie qu'à partir du rang 1).

a) $s_n = 0$ et $\sum u_n = 0$.

b) $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum u_n$ diverge.

c) $s_n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$ et $\sum u_n = \frac{1}{1 - z}$ si $|z| < 1$.

d) $s_n = \frac{e^{n+1} - 1}{e - 1}$ si $n \leq p$ et $s_n = \frac{e^{p+1} - 1}{e - 1}$ (= constante) pour tout $n \geq p$; donc

$$\sum u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{e^{p+1} - 1}{e - 1}.$$

Exercice 2.

i) Soit $\sum u_n$ une série convergente à coefficients complexes. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

ii) Quelle est la nature de la série $\sum \cos(n)$?

iii) On pose

$$\forall n \geq 1, u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Vérifier que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Calculer les sommes partielles de $\sum u_n$ et en déduire la nature de $\sum u_n$. La réciproque du i) est-elle vraie?

Solution : i) C'est parce que $u_n = s_n - s_{n-1}$, où s_n et s_{n-1} ont même limite quand $n \rightarrow +\infty$.

ii) Divergente : si elle convergeait, la suite $\cos n$ tendrait vers 0, or dans ce cas la sous-suite $\cos(2n)$ aussi tendrait vers 0, mais si c'était le cas la formule trigonométrique $\cos(2n) = -1 + 2 \cos^2 n$ serait fausse : en faisant $n \rightarrow +\infty$ elle impliquerait $0 = -1$.

iii) Cette suite tend vers $\ln(1+0)$ c'est à dire vers 0. D'autre part on a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n).$$

Donc, dans la somme partielle $s_n = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k))$, les termes s'éliminent deux à deux, et il reste $s_n = \ln(n+1)$ (qui tend vers $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$). Par conséquent la série diverge, et la réciproque de la proposition i) est fausse (la suite converge vers 0, la série diverge).

Exercice 3.

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où pour tout $n \geq 1$, u_n vaut

$$i) \frac{2}{n^2} ; \quad ii) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^n}\right) ; \quad iii) \left(\frac{(-1)^n}{n^2} + 1\right) ; \quad iv) \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Calculer, lorsqu'elle existe, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ en fonction de $\sigma = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\text{Solution : } i) \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 2\sigma.$$

$$ii) \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sigma - 1.$$

iii) Cette série diverge : si elle convergeait, $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ convergerait comme différence des deux séries convergentes $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2} + 1\right)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

(iv) On décompose d'abord la somme $\sigma = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ en trois :

$$\sigma = 1 + \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

La deuxième somme, c'est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\sigma}{4}$. La troisième somme c'est celle qu'on cherche : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. Donc $\sigma = 1 + \frac{\sigma}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, ce qui fait $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3\sigma}{4} - 1$.

Exercice 4.

a) Toutes les séries sont supposées être à termes positifs ou nuls. Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

- i) $\sum(u_n + v_n)$ convergente $\Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes.
- ii) La somme de deux séries divergentes est divergente.
- iii) $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes $\Rightarrow \sum u_n v_n$ convergente.
- iv) $\sum u_n$ convergente et $\sum v_n$ divergente $\Rightarrow \sum u_n v_n$ divergente.
- v) $\sum u_n$ convergente et $\sum v_n$ divergente $\Rightarrow \sum u_n + v_n$ divergente et $\sum \lambda v_n$ divergente.
- b) Mêmes questions pour des séries à termes complexes.
Solution : a) i) oui ; ii) oui ; iii) oui ; iv) non ; i) oui si $\lambda \neq 0$.
 b) i) non ; ii) non ; iii) non ; iv) non ; i) oui si $\lambda \neq 0$.

Exercice 5.

Déterminer la nature de la série de terme général :

a) $\frac{\sin(n)}{1+n^2}$; b) $\frac{e^{1/n}}{\sqrt{n}}$; c) $\frac{1}{n^2} \ln(n+1)$; d) $n^\alpha e^{-n}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$); e) $\frac{n!}{n^n}$; f) $e^{-(\ln n)^a}$ ($a \in \mathbb{R}$);

g) $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$; h) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$; i) $\frac{1}{\sqrt{n}-1}$; j) $\frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$.

Solution : a) convergente $\left(\left|\frac{\sin(n)}{1+n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}\right)$; b) divergente $\left(\frac{e^{1/n}}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;
 c) convergente $\left(\frac{1}{n^2} \ln(n+1) \leq \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$; d) convergente $\left(n^\alpha e^{-n} \leq e^{\frac{n}{2}} e^{-n} = e^{-\frac{n}{2}}\right)$;
 e) convergente $\left(\frac{n!}{n^n} \text{ est le produit des } \frac{k}{n} \text{ pour } k = 1, 2, \dots, n; \text{ ce produit est plus petit que } \frac{1}{n^2}\right)$;
 f) convergente si $a > 1$ (comparer $e^{-(\ln n)^a}$ avec $e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$); g) divergente $\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}\right)$;
 h) divergente
 (pour la même raison); i) divergente $\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; j) divergente $\left(\frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 6.

Déterminer la nature de la série de terme général :

i) $(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$; ii) $(-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$); iii) $\frac{(-1)^n}{n - \ln(n)}$; iv) $\frac{(-1)^n}{n^2 + \ln(n)}$
 v) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$; vi) $(-1)^n \frac{15n^2\sqrt{n} + 5n^2 + 3n + \sqrt{n} + 5}{\sqrt{n^8 + 8n\sqrt{n} + 7\sqrt{n} + 1}}$; vii) $(-1)^n e^{1/n}$; viii) $\cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Solution : i) convergente $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \text{ décroît, la série est alternée}\right)$;
 ii) convergente si $\alpha > 0$ (série alternée);
 iii) convergente (série alternée puisque $n - \ln n$ est croissante donc $\frac{1}{n - \ln n}$ décroissante);

- iv) convergente (même raison) ;
 v) divergente (série convergente + série divergente) ;
 vi) convergente (et même absolument convergente puisque $|u_n|$ est équivalent à $\frac{15}{n^{\frac{3}{2}}}$) ;
 vii) et viii) divergentes (ni $(-1)^n e^{1/n}$ ni $\cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ ne tend vers 0).

Exercice 7.

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$a) \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}; \quad b) \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right); \quad c) (-1)^n \frac{\sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + (-1)^n};$$

$$d) \tan \frac{1}{n} + \ln \frac{n^\alpha + \sqrt{n}}{n^\alpha - \sqrt{n}}, \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Solution : Remarquer d'abord que les trois premières séries sont difficiles ; cependant elles deviennent faciles si on fait apparaître une série alternée appropriée (pour la première et la troisième série il faut la fabriquer, et la deuxième série est elle-même alternée).

a) Divergente : c'est la somme d'une série convergente et d'une série divergente puisque, par la méthode des conjugués, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n(\sqrt{n} - (-1)^n)}{n - 1}$ est la somme de $\frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n - 1}$ et de $\frac{-1}{n - 1}$.

b) Vérifions qu'elle est alternée ; rappelons que pour tout x on a $\cos x = -\cos(x - \pi)$. On a donc

$$\cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right) = (-1)^n \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1} - n\pi\right).$$

Or la suite $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} - n\pi$ est positive et décroît de $(\sqrt{3} - 1)\pi$ à $\frac{\pi}{2}$ quand n va de 1 à $+\infty$ (on peut le voir par étude de fonction). On en déduit que $-\cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1} - n\pi\right)$ est positif et décroît vers 0. En écrivant

$$\cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right) = (-1)^{n+1} \left(-\cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1} - n\pi\right)\right),$$

on a mis la série de terme général $\cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ sous forme de série alternée donc convergente.

c) Divergente : c'est la somme d'une série convergente et d'une série divergente, par la même méthode qu'en a).

d) Divergente, plus grande que $\frac{1}{n}$.

Exercice 8.

On pose pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{n^2}$. Justifier l'existence de $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Le but est d'étudier la convergence de la série $\sum r_n$.

i) Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$.

ii) En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier $N \geq n+1$:

$$\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2}.$$

iii) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{1}{n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$.

iv) Donner alors un équivalent de (r_n) lorsque n est au voisinage de $+\infty$. Que peut-on en conclure sur la nature de la série $\sum r_n$?

$$\text{Solution : } r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \text{ est fini, il est égal à } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

i) Les inégalités $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$ proviennent des inégalités $0 \leq k \leq t \leq k+1$ qui impliquent $k^2 \leq t^2 \leq (k+1)^2$.

ii) On intègre les inégalités $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$ pour $t \in [k, k+1]$, puis on fait la somme du résultat obtenu pour $k = n+1$ à N .

iii) Maintenant on intègre $\frac{1}{t^2}$ entre $n+1$ et $N+1$: on obtient $-\frac{1}{N+1} + \frac{1}{n+1}$, ce qui fait $\frac{1}{n+1}$ quand $N \rightarrow +\infty$. Les inégalités de la question ii) impliquent donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2}.$$

Comme le terme de gauche vaut $r_n - \frac{1}{(n+1)^2}$ et le terme de droite vaut r_n , on en déduit

$$r_n \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \text{ et } \frac{1}{n+1} \leq r_n.$$

iv) En divisant par $\frac{1}{n}$, on déduit de ces inégalités que $\frac{r_n}{\frac{1}{n}}$ tend vers 1, c'est à dire que r_n est équivalent à $\frac{1}{n}$ et par conséquent la série $\sum r_n$ diverge.

Exercice 9.

Soit $u_n > 0$ le terme général d'une série.

a) Montrer que la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{1+n^2 u_n}$ est convergente.

b) Montrer que la série de terme général $w_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ est de la même nature que la série $\sum u_n$.

Solution : a) La série $\sum v_n$ converge parce que v_n est plus petit que $\frac{1}{n^2}$.

b) Les séries $\sum w_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature parce que w_n est équivalent à u_n (cette équivalence est évidente si $\sum u_n$ converge, parce qu'alors $\frac{u_n}{w_n} = 1 + u_n$ tend vers 1 du fait que u_n tend vers 0 ; mais si on suppose que $\sum w_n$ converge, il faut d'abord démontrer que u_n tend vers 0 pour en déduire que $\frac{u_n}{w_n} = 1 + u_n$ tend vers 1).