Université de Provence 2005–2006

Corrigé partiel TMB

9 novembre 2005

– I –

(a) Composantes d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ orthogonal au plan (P) d'équation $x+y+z=0$.

Réponse : L'équation du plan équivaut à $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ *(c'est à dire :* $\overrightarrow{OM}$ *est orthogonal à* $\overrightarrow{v}$*), où* M *est le point de coordonnées* (x,y,z) *et* $\overrightarrow{v}$ *le vecteur de coordonnées* $(1,1,1)$.

(b) Équation paramétrique de la droite (D) passant par $A(1,1,1)$ et orthogonale à (P).

Réponse : Si $M(x,y,z)$ *est sur la droite, alors* $\overrightarrow{AM}$ *est parallèle à* $\overrightarrow{v}$*, donc il existe* $t\in\mathbf{R}$ *tel que* $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{v}$*, ce qui fait* $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{v}$. *Cette égalité équivaut à*

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$$

qu'on appelle équation paramétrique de la droite (D)*, parce qu'elle exprime les coordonnées des points de la droite en fonction d'un paramètre* t. *Remarque : si dans cette équation on remplace* $1+t$ *par n'importe quelle fonction (bijective) de* t*, mais trois fois la même fonction, on obtient un autre paramétrage de* (D).

(c). Distance de A à (P).

Réponse : C'est $||\overrightarrow{OA}||$ *puisque* $\overrightarrow{OA}$ *est le vecteur* $\overrightarrow{v}$ *orthogonal à* (P)*, et* O *est un point de* (P)*. On calcule* $||\overrightarrow{OA}||=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$.

– II –

$A(1,1,1)$, $B(2,3,0)$, $C(0,1,0)$.

(a) $\widehat{BAC}$?

Réponse : C'est $\frac{\pi}{2}$ *parce que* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) = 0$.

(b) Composantes d'un vecteur orthogonal au plan passant par A, B et C.

Réponse : C'est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-2, 2, 2)$.

(c) Équation cartésienne du plan passant par A, B et C.

Réponse : Si M est dans le plan, $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur qu'on a trouvé à la question précédente, donc $-2(x-1)+2(y-1)+2(z-1)=0$. Aprés simplification et division par -2, ça fait

$$x - y - z + 1 = 0.$$

(d) Aire du triangle de sommets A, B et C.

Réponse : C'est $\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|| = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{3}$.

(e) Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ est-il nul, colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ ou égal à $\overrightarrow{AC}$?

Réponse : Remarquons que ce produit de vecteurs a pour norme le produit des normes, puisque $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$ et à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Il n'est pas nul (ni $||\overrightarrow{AB}||$ ni $||\overrightarrow{AC}||$ n'étant nul). Il est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ parce que d'une part il est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, et d'autre part le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est aussi orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Mais il n'est pas égal à $\overrightarrow{AC}$: s'il l'était, $||\overrightarrow{AB}||$ vaudrait 1.

– III –

(a) $\cos(x)$ en fonction de e^{ix} et e^{-ix} ?

Réponse : C'est $\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

(b) $\cos^3(x)$ en fonction de $\cos(3x)$ et $\cos(x)$?

Réponse : En utilisant la formule $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ on obtient

$$\cos^3(x) = \frac{\cos(3x)+3\cos(x)}{4}.$$

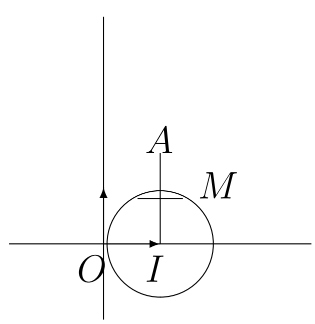
(c) Résoudre $\cos^3(x) - \dfrac{\cos(3x)}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.

Réponse : $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ *ou* $-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$.

– IV –

Ensemble des points M d'affixe z du plan tels que $z-1$, $\dfrac{1}{z-1}$ et $z-1-ia$ aient même module.

Réponse : $|z-1| = \dfrac{1}{|z-1|}$ *équivaut à* $|z-1|^2 = 1$ *donc à* $|z-1| = 1$. *Le point M est alors sur un cercle de rayon 1, dont le centre est le point I d'affixe 1. L'autre équation $|z-1| = |z-1-ia|$ équivaut à dire que M est sur la médiatrice du segment qui joint le point I au point A d'affixe $1+ia$.*



Le point M a donc pour affixe $1 - \sqrt{1-\dfrac{a^2}{4}} + i\dfrac{a}{2}$ *ou* $1 + \sqrt{1-\dfrac{a^2}{4}} + i\dfrac{a}{2}$.

– V –

(a) Résoudre $z^2 + \overline{z} - \dfrac{1}{2} = 0$ dans le cas ou z est réel.

Réponse : C'est une équation du second degré puisque, si z est réel, $\overline{z} = z$. Les solutions sont $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ *et* $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

(b) Montrer que $\rho\, e^{i\theta} \notin \mathbf{R}$ si et seulement si $\rho \neq 0$ et $theta \neq k\pi$.

Réponse : Un nombre complexe n'est pas réel si et seulement si sa partie imaginaire est non nulle : $\rho \sin(\theta)$ *est non nul, ce qui équivaut à* $\rho \neq 0$ *et* $theta \neq k\pi$.

(c) Résoudre $z^2 + \overline{z} - \dfrac{1}{2} = 0$ dans le cas ou z n'est pas réel.

Réponse : En remplaçant z *par* $\rho\, e^{i\theta}$ *(avec* $\rho > 0$ *et* $\theta \neq k\pi$*), on obtient*

$$0 = z^2 + \overline{z} - \frac{1}{2} = \left(\rho^2 \cos(2\theta) + \rho \cos(\theta) - \frac{1}{2}\right) + i\left(\rho^2 \sin(2\theta) - \rho \sin(\theta)\right).$$

On écrit que la partie réelle et la partie imaginaire de cette expression sont nulles. On utilise les formules trigonométriques sur $\cos(2\theta)$ *et* $\sin(2\theta)$*. De l'équation* $\rho^2 \sin(2\theta) - \rho \sin(\theta) = 0$ *on déduit* $\rho \cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$*, ce qui simplifie l'équation* $\rho^2 \cos(2\theta) + \rho \cos(\theta) - \dfrac{1}{2} = 0$ *: elle équivaut à* $\cos(2\theta) = 0$*, donc à* $\cos^2(\theta) = \dfrac{1}{2}$*. Compte tenu que* $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2\rho}$ *est positif, on obtient finalement* $\theta = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ *ou* $\dfrac{\pi}{4} + k\pi$*, et* $z = \dfrac{1-i}{2}$ *ou* $\dfrac{1+i}{2}$.