Exercice 1.

Pour chacune des expressions de a_n ci-dessous, calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et déterminer l'intervalle sur lequel il y a convergence :

a) $a_n = 1$ b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ c) $a_n = (\ln n)^n$ d) $a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

e) $a_n = \frac{15n^2\sqrt{n} + 5n^2 + 3n + \sqrt{n} + 5}{\sqrt{n^8 + 8n\sqrt{n} + 7\sqrt{n} + 1}}$ f) $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

- a) rayon 1, intervalle $] -1, 1[$ b) rayon 1, intervalle $[-1, 1[$ (en $x = -1$ c'est une série alternée) c) rayon 0, intervalle $\{0\}$
 d) rayon 1, intervalle $] -1, 1[$ (en $x = 1$ c'est une série alternée)
 e) rayon 1, intervalle $[-1, 1]$ (où la série converge normalement, par comparaison avec la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$)
 f) rayon 1, intervalle $] -1, 1[$.

Exercice 2.

Pour chacune des séries entières $\sum a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$ ci-dessous, déterminer le rayon de convergence en précisant chaque fois le critère utilisé.

a) $\sum z^n$ b) $\sum a^n z^n$, $a \in \mathbb{C}$, c) $\sum n! z^n$, d) $\sum \frac{z^n}{n!}$, e) $\sum \frac{a^n z^n}{n!}$, $a \in \mathbb{C}$, f) $\sum (1 + \dots + (n+1))z^n$, g) $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$

Utiliser plutôt la formule $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}}$ (c'est à dire le critère de Cauchy) pour les séries a) et e), et la formule $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ (c'est à dire le critère de d'Alembert) pour les autres séries.

- a) rayon 1 et rayon $1/a$, b) rayon 0, c) rayon ∞ , d) rayon 0,
 e) rayon ∞ , f) rayon 1, g) rayon e .

Exercice 3.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

1. Montrer que s'il existe deux nombres complexes α et β de même module $\rho > 0$, tels que $\sum a_n \alpha^n$ converge et $\sum a_n \beta^n$ diverge, alors $R = \rho$. Cette propriété est-elle caractéristique du rayon de convergence ?
2. Montrer que si la suite $(a_n)_n$ ne converge pas vers 0, nécessairement $R \leq 1$. Peut-on affirmer que l'inégalité est stricte ?
3. Montrer que si la suite $(a_n)_n$ est bornée, nécessairement $R \geq 1$.
4. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum z^{n^2}$. Pouvait-on appliquer le critère de d'Alembert ?

1. Si $\sum a_n \alpha^n$ converge alors $a_n \alpha^n$ est borné et par conséquent le rayon de convergence est au moins égal à $|\alpha| = \rho$.

Si $\sum a_n \beta^n$ diverge alors $\sum |a_n \beta^n|$ c'est à dire $\sum |a_n| \rho^n$ diverge aussi. Le rayon de convergence est alors $\leq \rho$.

On conclut que le rayon de convergence est ρ . Cette propriété n'est pas caractéristique du rayon de convergence : dans le cas de la série géométrique $\sum z^n$ de rayon de convergence $R = 1$ il n'existe pas α de module 1 tel que $\sum \alpha^n$ converge puisque toute série convergente $\sum u_n$ vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, ce qui n'est visiblement pas le cas si $u_n = \alpha^n$ avec α de module 1.

2. Si la suite $(a_n)_n$ ne converge pas vers 0, nécessairement $R \leq 1$ puisque $\sum |a_n| 1^n$ diverge. Éventuellement $R = 1$, par exemple dans le cas de la série géométrique $\sum z^n$.

3. Si la suite $(a_n)_n$ est bornée, nécessairement $R \geq 1$ puisque $a_n 1^n$ est borné.

4. Ces deux résultats s'appliquent à la série $\sum z^{n^2}$: les coefficients de cette série ne tendent pas vers 0 puisque le coefficient a_k pour $k = n^2$ vaut 1 ; et ils sont bornés puisque les autres a_k (pour $k \neq n^2$) sont nuls. Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum z^{n^2}$ est 1, sans qu'on puisse appliquer le critère de d'Alembert à cause des coefficients nuls.

Exercice 4.

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Montrer que s'il existe deux nombres réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \leq a_n \leq \beta$, alors la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

2. On considère la série entière $\sum z^{n^2}$. Mettre cette série sous la forme $\sum a_n z^n$ et déterminer son rayon de convergence.

1. $R = \frac{1}{\limsup (|a_n|)^{\frac{1}{n}}}$ vaut 1 parce que $(a_n)^{\frac{1}{n}}$ est compris entre $\alpha^{\frac{1}{n}}$ et $\beta^{\frac{1}{n}}$, qui tendent vers 1.

2. Pour cette série les a_n valent 1 si n est le carré d'un entier, et 0 sinon. Les $(|a_n|)^{\frac{1}{n}}$ valent 0 ou 1, donc leur limite sup est 1 et $R = 1$.

Exercice 5.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $2^n z^n, (2^n - 1)z^n,$
2. la somme de $2^n z^n$ et de $(2^n - 1)z^n,$
3. la différence de $2^n z^n$ et de $(2^n - 1)z^n,$

1. $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2},$

2. $\frac{1}{2},$

3. 1.

Exercice 6.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

1. Déterminer en fonction de R le rayon de convergence des séries entières

$$\sum 5a_n z^n, \quad \sum n a_n z^n, \quad \sum 3^n a_n z^n, \quad \sum a_n z^{2n}.$$

2. Calculer le rayon de convergence de $\sum 3^n n z^{2n}$.

1. $R, R, \frac{R}{3}$ et $\sqrt{R}$ (pour cette dernière, utiliser le changement de variable $Z = z^2$).

2. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ (utiliser le changement de variable $Z = 3z^2$).

Exercice 7.

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

$$a) \sum_{n \geq 0} n x^n, \quad b) \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}, \quad c) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 1}{n^2 + 3n + 2} x^n, \quad d) \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n!} x^n,$$

$$\begin{aligned}
e) \sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(2n)!}, \quad f) \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)x^n, \quad g) \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n, \quad h) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+3}}{4n+3}, \quad i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \\
j) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(2n)!}, \quad k) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+2+\dots+n}, \quad l) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}
\end{aligned}$$

Leurs rayons de convergence valent 1, sauf $+\infty$ pour celles qui font intervenir des factorielles.

Leurs valeurs sont :

$$\frac{x}{(x-1)^2}, \quad \frac{-\ln(1-x)-x}{x^2}, \quad \frac{8x-10}{2x(x-1)} - \frac{(4x-10)\ln(1-x)}{2x^2}, \quad e^x(x+1), \quad \cosh(\sqrt{x^3}), \quad \frac{2x-1}{(x-1)^2}, \quad -\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}, \quad -\frac{1}{4}\ln(x-1) + \frac{1}{4}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\arctan(x), \\
-\ln(1-x), \quad \cosh(\sqrt{x^3}), \quad 2 + \frac{2(1-x)\ln(1-x)}{x}, \quad -\frac{(1-x)^2\ln(1-x)}{2x^2} + \frac{3x^2-2x}{4x^2}.$$

(Pour calculer ces séries on a utilisé le résultat suivant : quelque soient les coefficients a_n la fonction $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a pour dérivée

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et pour primitive } S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ à condition que } x \text{ appartienne à l'intervalle }]-R, R[\text{, où } R \text{ est le}$$

rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ (sauf la série qui vaut $(\sqrt{x^3})$, pour laquelle on a utilisé le formulaire).

Exercice 8.

Exprimer l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+\frac{1}{2}t)}{t} dt$ comme la somme d'une série.

$$C'est \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{n-1}}{n 2^n} \right) dt, \text{ qui est égal à } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{n-1}}{n 2^n} dt \right), \text{ c'est à dire à } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 2^n}.$$

Exercice 9. (Extrait de l'examen de septembre 1999.)

On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^{2n+1}$, où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)}.$$

- Déterminer son rayon de convergence R et vérifier que la série converge simplement sur $[-R, R]$. On note f sa somme.
- Démontrer que f est dérivable sur $] - R, R[$ et que $f'(x) = x \arctan x$. En déduire $f(x)$ pour tout $x \in] - R, R[$ (par une intégration par parties).
- Montrer que la série entière converge normalement sur $[-R, R]$. En déduire que f est continue sur $[-R, R]$.
- Donner l'expression de f sur $[-R, R]$. Justifier la réponse.
- Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}.$$

1. Le rayon de la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)} x^{2n+1}$ est 1. Elle converge simplement sur $[-1, 1]$, par comparaison de la

série $\sum_{n \geq 1} |a_n x^{2n+1}|$ avec la série de Riemann convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. Sa dérivée $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^{n+1} \int_0^x t^{2n-2} dt \right)$ est égale à x fois l'intégrale (de 0 à x) de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} t^{2n-2}$.

Comme cette somme géométrique vaut $\frac{1}{1+t^2}$, on en déduit

$$f'(x) = x \arctan(x),$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan(x),$$

3. La série entière converge normalement sur $[-1, 1]$, par comparaison de la série $\sum_{n \geq 1} \max_{x \in [-1, 1]} (|a_n x^{2n+1}|) = \sum_{n \geq 1} |a_n|$ avec la série

de Riemann convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Sa somme est une fonction continue parce que la convergence normale entraîne la convergence uniforme.

4. La formule qu'on a trouvée pour $x \in]-1, 1[$ reste valable pour $x \in [-1, 1]$, par passage à la limite.

5. Par conséquent $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} = f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Exercice 10.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ parce que c'est la somme d'une série entière de rayon infini. $f^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $f^{(2n+1)}(0) = 0$.

Exercice 11.

On considère la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

- Déterminer son rayon de convergence R et calculer sa somme pour $|x| < R$.
- Démontrer que la série entière converge pour $x = 1$, puis que $|R_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$, pour tout $x \in [0, 1]$, où R_n désigne le reste d'ordre n .
- En déduire que la série converge uniformément sur $[0, 1]$.
- Démontrer que $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Justifier votre réponse.
- Démontrer que la série entière converge uniformément sur $[-1, 1]$.

1. Cette série, qu'on a déjà vue à l'exercice 9, a pour rayon 1 et sa somme vaut $\arctan(x)$.

2. Elle converge pour $x = 1$ (c'est une série alternée). Pour $x \in [0, 1]$, c'est encore une série alternée, donc son reste $R_n(x) = \sum_{k>n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ est aussi une série alternée, et par conséquent sa valeur absolue est inférieure à la valeur absolue de son premier terme c'est à dire à $\frac{x^{2n+3}}{2n+3}$.

3. La convergence uniforme s'en déduit (le maximum de la valeur absolue du reste étant $\frac{1}{2n+3}$).

4. La somme de cette série est donc une fonction continue sur $[0, 1]$; et comme la fonction $\arctan$ est aussi continue on a donc (en faisant $x \rightarrow 1$) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

5. On peut faire de même pour $x \in [-1, 0]$.

Exercice 12. (Développement en série entière)

- Calculer le développement en série entière en 0 de chacune des fonctions suivantes; préciser le rayon de convergence.

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x-a} \quad (a \in \mathbb{R}^*), \quad f_2 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{2-9x^4}\right), \quad f_3 : x \mapsto \arctan \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

- Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

n'est pas développable en série entière en 0.

- $f_1(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$, $f_2(x) = \frac{1}{2} \left(\ln(\sqrt{2}) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{9}{2} x^4 \right)^n \right)$, $f_3(x) = \frac{\pi}{4} + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{4n}$.
- f n'est pas développable en série entière en 0 parce que ses dérivées y sont nulles, alors que f elle-même n'est pas nulle.

Exercice 13. (Résolution d'une équation différentielle linéaire)

On cherche les solutions de l'équation différentielle

$$(x+1)y' + y = \frac{2}{(1-x)^2} \quad (1)$$

sur l'intervalle $I =]-1, 1[$.

- Résoudre l'équation homogène sur I .
- On va chercher une solution particulière de (1) sous la forme d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0. Rappeler la définition d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0.
- On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et que sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (1).
 - Déterminer une relation de récurrence vérifiée par les a_n .
 - En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression de a_n en fonction de a_0 .
- Réciproquement, on fixe $a_0 \in \mathbb{R}$ et on suppose que les a_n sont donnés en fonction de a_0 par l'expression trouvée en 2.(b).
 - Montrer que si deux séries entières $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$ ont même rayon de convergence R , et si leurs coefficients vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n c_n = 0$, alors la série entière $\sum (b_n + c_n) x^n$ a pour rayon de convergence R .
 - En déduire le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ selon la valeur de a_0 .
 - Déterminer la forme générale des solutions de (1) développables en série entière au voisinage de 0.
- En déduire l'ensemble des solutions de (1) sur $] -1, 1[$.
 - L'équation homogène $(x+1)y' + y = 0$ a pour solution $y(x) = \frac{C}{x+1}$.
 - Une fonction développable en série entière au voisinage de 0 s'écrit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif.
 - $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (1) si et seulement si

$$(x+1) \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{(1-x)^2}. \quad (2)$$

Compte tenu que $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) a_{m+1} x^m$ (avec $m = n-1$), et compte tenu du développement en série entière de $\frac{2}{(1-x)^2}$ (obtenu par dérivation de celui de $\frac{2}{1-x}$, l'équation (2) équivaut à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n a_n + (n+1) a_{n+1} + a_n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1) x^n.$$

On en déduit la relation de récurrence $(n a_n + (n+1) a_{n+1} + a_n) x^n = 2(n+1)$ laquelle, en divisant par $n+1$, devient

$$a_n + a_{n+1} = 2.$$

- Comme $a_{n+2} = 2 - a_{n+1} = 2 - (2 - a_n) = a_n$, on en déduit $a_{2n} = a_0$ et $a_{2n+1} = 2 - a_0$.
- Le rayon de convergence de la série entière $\sum (b_n + c_n) x^n$ est $\frac{1}{\limsup (|b_n + c_n|)^{\frac{1}{n}}}$, qui vaut R parce que $b_n + c_n$ vaut b_n ou c_n , du fait que b_n et c_n ne peuvent pas être tous les deux non nuls.
 - D'après le 2.(b) on se ramène à un calcul de sommes géométriques, et on obtient $y(x) = \frac{a_0}{1-x^2} + \frac{(2-a_0)x}{1-x^2}$. Après simplification c'est $y(x) = \frac{a_0}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2}$.

4. C'est aussi l'ensemble des solutions de (1) sur $] -1, 1[$, puisqu'on sait que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle du premier ordre est égal à l'ensemble des solutions de l'équation homogène (voir question 1.) auxquelles on ajoute une des solutions de l'équation elle-même.

Exercice 14. (Extrait de l'examen de septembre 2004.)

Soit l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y'' - 2xy' + (2 + x^2)y = 0 \quad (3)$$

1. Montrer que l'ensemble des solutions de (2) développables en série entière sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On note F cet espace.

2. i) Soit $y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence R . Montrer que $y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est solution de (2) si et seulement si $R > 0$, $a_0 = 0$ et les coefficients satisfont une relation de récurrence d'ordre 2 qu'on déterminera.

ii) En déduire alors que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{2k+2} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_2, \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_1.$$

iii) En déduire que $y = a_1 f_1 + a_2 f_2$, où $f_1(x) = x \sin x$ et $f_2(x) = x \cos x$.

3. Etudier les rayons de convergence de y , f_1 et f_2 . En déduire que F est de dimension 2.

4. Prouver l'existence et l'unicité de la solution de (E) qui vérifie

$$y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = y''(0) = 1,$$

l'expliciter.

1. Si y_1 et y_2 sont solutions alors $y_1 + y_2$ et λy_1 le sont aussi puisque

$$\begin{aligned} x^2(y_1 + y_2)'' - 2x(y_1 + y_2)' + (2 + x^2)(y_1 + y_2) &= x^2 y_1'' - 2x y_1' + (2 + x^2)y_1 + x^2 y_2'' - 2x y_2' + (2 + x^2)y_2 \\ &= 0 + 0 = 0 \\ x^2(\lambda y_1)'' - 2x(\lambda y_1)' + (2 + x^2)(\lambda y_1) &= \lambda(x^2 y_1'' - 2x y_1' + (2 + x^2)y_1) \\ &= \lambda 0 = 0. \end{aligned}$$

2. i) Le rayon est > 0 parce que les solutions sont définies sur un intervalle de longueur non nulle. On remplace y par $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ dans l'équation, ce qui fait

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (2 + x^2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-2} x^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = 0 \text{ avec } b_n = n(n-1)a_n - 2na_n + 2a_n + a_{n-2} \\ &\Leftrightarrow \forall n, b_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n, (n^2 - 3n + 2)a_n + a_{n-2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n, (n-1)(n-2)a_n + a_{n-2} = 0. \end{aligned}$$

Compte tenu qu'il y a des a_{n-2} , le calcul est valable si on pose $a_n = 0$ pour les entiers n strictement négatifs.

Puis on fait $n = 2$ dans l'équation $(n-1)(n-2)a_n + a_{n-2} = 0$: ce qui fait $0 + a_0 = 0$ c'est à dire $a_0 = 0$.

ii) Les a_{2k+2} et a_{2k+1} de l'énoncé vérifient l'équation $(n-1)(n-2)a_n + a_{n-2} = 0$.

iii) On reconnaît, dans les a_{2k+2} et a_{2k+1} de l'énoncé, les coefficients du développement en série entière du sinus et du cosinus.

Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est la somme de $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+2} x^{2k+2}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$, il est égal à $a_2 x \sin x + a_1 x \cos x$.

3. Le rayon de convergence de cette série est celui du sinus et du cosinus, c'est à dire infini.

4. $a_2 x \sin x + a_1 x \cos x$ vérifie ces trois conditions si et seulement si $a = \frac{1}{2}$ et $b = 1$. On a donc $y(x) = \frac{1}{2} x \sin x + x \cos x$.

Exercice 15.

On considère l'équation différentielle $xy'' + 2y' + xy = 0$ (E). On cherche des solutions de

la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Ecrire les relations que satisfont les coefficients a_n .
 2. Démontrer que $a_1 = 0$ et en déduire que $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Calculer a_{2p} en fonction de a_0 .
 3. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$. Calculer $x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et en déduire la valeur de $y(x)$ pour $x \neq 0$ en fonction de a_0 .
 4. On se propose de retrouver autrement ce résultat. Pour cela, on pose $z(x) = xy(x)$ où la fonction z est de classe C^∞ et vérifie $z(0) = 0$.
 - (a) Démontrer que z est solution de l'équation $z'' + z = 0$.
 - (b) Retrouver l'expression de $y(x)$ trouvée dans la troisième question.
1. Même méthode qu'à l'exercice précédent, on obtient $(n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$.
 2. D'après la formule de Taylor, $a_1 = y'(0)$. Mais $y'(0) = 0$, on l'obtient en faisant $x = 0$ dans l'équation (E). On déduit de la formule de la question 1., que a_{n+1} est nul si a_{n-1} l'est. Comme a_1 est nul, tous les coefficients d'indice impair sont nuls.
 3. La formule de la question 1. équivaut à $a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+1)n}$. On en déduit par récurrence que

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{(2n+1)!}.$$

La série $\sum a_n x^n = \sum (-1)^n \frac{a_0}{(2n+1)!} x^{2n}$ a donc un rayon de convergence infini.

$$x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_0}{(2n+1)!} x^{2n+1} = a_0 \sin(x) \Rightarrow \boxed{y(x) = a_0 \frac{\sin(x)}{x}} \text{ pour } x \neq 0.$$

4. (a) D'après la formule de Leibniz la dérivée seconde de xy est $2y' + y''$. Donc l'équation (E) équivaut à $z'' + z = 0$.
- (b) Par la méthode classique de résolution des équations différentielles du second ordre à coefficients constants, $z(x)$ vaut $C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$. Mais du fait qu'on a posé $z(x) = xy(x)$, $z(0)$ est nul c'est à dire $C_1 = 0$. On a donc bien $z(x) = C_2 \sin(x)$ d'où $y(x) = C_2 \frac{\sin(x)}{x}$.