Université de Provence
Licence de Mathématiques 2004-2005
M15 (Analyse 2)

TD 1 : Séries numériques

Exercice 1.

On considère la série numérique de terme général u_n et on note s_n la $n^{ème}$ somme partielle de $\sum u_n$. Dans chacun des cas suivants :

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$;
b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n$;
c) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = z^n$ où $z \in \mathbb{C}$;
d) $u_n = e^n$ si $n \leq p$ et $u_n = 0$ sinon, où $p \in \mathbb{N}$ est fixé,

calculer s_n et en déduire la nature de $\sum u_n$. Calculer, lorsqu'elle existe, la somme de la série.

Solution : $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *dans cet exercice (mais* $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ *dans le cas où* u_0 *n'est pas défini).*
a) $s_n = 0$ *et* $\sum u_n = 0$.
b) $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$ *et* $\sum u_n$ *diverge.*
c) $s_n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ *et* $\sum u_n = \frac{1}{1-z}$ *si* $|z| < 1$.
d) $s_n = \frac{e^{n+1}-1}{e-1}$ *si* $n \leq p$ *et* $s_n = \frac{e^{p+1}-1}{e-1}$ *(= constante) pour tout* $n \geq p$ *; donc* $\sum u_n = s_p = s_{p+1} = \cdots = \frac{e^{p+1}-1}{e-1}$.

Exercice 2.

i) Soit $\sum u_n$ une série convergente à coefficients complexes. Montrer que la *suite* (u_n) converge vers 0.

ii) Quelle est la nature de la série $\sum \cos(n)$?

iii) On pose

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Vérifier que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Calculer les sommes partielles de $\sum u_n$ et en déduire la nature de $\sum u_n$. La réciproque du i) est-elle vraie ?

Solution : i) C'est parce que $u_n = s_n - s_{n-1}$, *où* s_n *et* s_{n-1} *ont même limite quand* $n \to +\infty$.

ii) Divergente : si elle convergeait, la suite $\cos n$ *tendrait vers* 0, *or dans ce cas la sous-suite* $\cos(2n)$ *aussi tendrait vers* 0, *mais alors la formule trigonométrique* $\cos(2n) = -1 + 2\cos^2 n$ *serait fausse : en faisant* $n \to +\infty$ *elle deviendrait* $0 = -1$.

iii) Cette suite tend vers $\ln(1+0)$ *c'est à dire vers* 0. *D'autre part on a*

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n).$$

Donc, dans la somme partielle $s_n = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln(k))$, *les termes s'éliminent deux à deux, et il reste* $s_n = \ln(n+1)$ *(qui tend vers* $+\infty$ *quand* $n \to +\infty$*). Par conséquent la série diverge, et la réciproque de la proposition i) est fausse (la suite converge vers* 0*, la série diverge).*

Exercice 3.

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où pour tout $n \geq 1$, u_n vaut

$$i)\ \frac{2}{n^2}\ ; \qquad ii)\ \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^n}\right)\ ; \qquad iii)\ \left(\frac{(-1)^n}{n^2} + 1\right)\ ; \qquad iv)\ \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Calculer, lorsqu'elle existe, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ en fonction de $\sigma = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solution : i) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 2\sigma.$

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sigma - 1.$

iii) Cette série diverge : si elle convergeait, $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ *convergerait comme différence des deux séries convergentes* $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2} + 1\right)$ *et* $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

(iv) On décompose d'abord la somme $\sigma = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *en trois :*

$$\sigma = 1 + \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

La deuxième somme, c'est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\sigma}{4}$. *La troisième somme c'est celle qu'on cherche :* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. *Donc* $\sigma = 1 + \frac{\sigma}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, *ce qui fait* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3\sigma}{4} - 1.$

Exercice 4.

a) Toutes les séries sont supposées être à termes positifs ou nuls. Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

i) $\sum(u_n+v_n)$ convergente $\Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes.

ii) La somme de deux séries divergentes est divergente.

iii) $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes $\Rightarrow \sum u_n v_n$ convergente.

iv) $\sum u_n$ convergente et $\sum v_n$ divergente $\Rightarrow \sum u_n v_n$ divergente.

v) $\sum u_n$ convergente et $\sum v_n$ divergente $\Rightarrow \sum u_n + v_n$ divergente et $\sum \lambda v_n$ divergente.

b) Mêmes questions pour des séries à termes complexes.

Solution : a) i) oui ; ii) oui ; iii) oui ; iv) non ; i) oui si $\lambda \neq 0$.
b) i) non ; ii) non ; iii) non ; iv) non ; i) oui si $\lambda \neq 0$.

Exercice 5.

Déterminer la nature de la série de terme général :

a) $\dfrac{\sin(n)}{1+n^2}$; *b)* $\dfrac{e^{1/n}}{\sqrt{n}}$; *c)* $\dfrac{1}{n^2}\ln(n+1)$; *d)* $n^\alpha e^{-n}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$; *e)* $\dfrac{n!}{n^n}$; *f)* $e^{-(\ln n)^a}$ $(a \in \mathbb{R})$;

g) $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$; *h)* $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$; *i)* $\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}$; *j)* $\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.

Solution : a) convergente $\left(\left|\dfrac{\sin(n)}{1+n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}\right|\right)$ *; b) divergente* $\left(\dfrac{e^{1/n}}{\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ *;*
c) convergente $\left(\dfrac{1}{n^2}\ln(n+1) \leq \dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ *; d) convergente* $\left(n^\alpha e^{-n} \leq e^{\frac{n}{2}} e^{-n} = e^{-\frac{n}{2}}\right)$ *;*
e) convergente $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right.$ *est le produit des* $\dfrac{k}{n}$ *pour* $k = 1, 2, \ldots, n$ *; ce produit est plus petit que* $\left.\dfrac{1}{n^2}\right)$ *;*
f) convergente si $a > 1$ $\left(\right.$*comparer* $e^{-(\ln n)^a}$ *avec* $\left.e^{-\ln n} = \dfrac{1}{n}\right)$ *; g) divergente* $\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}\right)$ *;*
h) divergente
(pour la même raison) ; i) divergente $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}-1} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ *; j) divergente* $\left(\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 6.

Déterminer la nature de la série de terme général :

i) $(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; *ii)* $(-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$; *iii)* $\dfrac{(-1)^n}{n-\ln(n)}$; *iv)* $\dfrac{(-1)^n}{n^2+\ln(n)}$

v) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}$; *vi)* $(-1)^n \dfrac{15n^2\sqrt{n}+5n^2+3n+\sqrt{n}+5}{\sqrt{n^8+8n\sqrt{n}+7\sqrt{n}+1}}$; *vii)* $(-1)^n e^{1/n}$; *viii)* $\cos\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

Solution : i) convergente $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right.$ *décroit, la série est alternée*$\left.\right)$ *;*
ii) convergente si $\alpha > 0$ *(série alternée) ;*
iii) convergente $\left(\right.$*série alternée puisque* $n - \ln n$ *est croissante donc* $\dfrac{1}{n-\ln n}$ *décroissante*$\left.\right)$ *;*

iv) convergente (même raison) ;
v) divergente (série convergente + série divergente) ;
vi) convergente $\left(\textit{et même absolument convergente puisque } |u_n| \textit{ est équivalent à } \dfrac{15}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$;
vii) et viii) divergentes $\left(\textit{ni } (-1)^n e^{1/n} \textit{ ni } \cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \textit{ ne tend vers } 0\right)$.

Exercice 7.

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$a)\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n};\quad b)\ \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right);\quad c)\ (-1)^n\frac{\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+(-1)^n};$$

$$d)\ \tan\frac{1}{n}+\ln\frac{n^\alpha+\sqrt{n}}{n^\alpha-\sqrt{n}},\quad \alpha>\frac{1}{2}.$$

Solution : Remarquer d'abord que les trois premières séries sont difficiles ; cependant elles deviennent faciles si on fait apparaître une série alternée appropriée (pour la première et la troisième série il faut la fabriquer, et la deuxième série est elle-même alternée).
a) Divergente : c'est la somme d'une série convergente et d'une série divergente puisque, par la méthode des conjugués, $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\dfrac{(-1)^n(\sqrt{n}-(-1)^n)}{n-1}$ *est la somme de* $\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ *et de* $\dfrac{-1}{n-1}$.
b) Vérifions qu'elle est alternée ; rappelons que pour tout x *on a* $\cos x=-\cos(x-\pi)$. *On a donc*

$$\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)=(-1)^n\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}-n\pi\right).$$

Or la suite $\pi\sqrt{n^2+n+1}-n\pi$ *est positive et décroit de* $(\sqrt{3}-1)\pi$ *à* $\dfrac{\pi}{2}$ *quand* n *va de* 1 *à* $+\infty$ *(on peut le voir par étude de fonction). On en déduit que* $-\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}-n\pi\right)$ *est positif et décroît vers* 0. *En écrivant*

$$\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)=(-1)^{n+1}\left(-\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}-n\pi\right)\right),$$

on a mis la série de teme général $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ *sous forme de série alternée donc convergente.*
c) Divergente : c'est la somme d'une série convergente et d'une série divergente, par la même méthode qu'en a).
d) Divergente, plus grande que $\dfrac{1}{n}$.

Exercice 8.

On pose pour $n\geq 1$, $a_n=\dfrac{1}{n^2}$. Justifier l'existence de $r_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k$. Le but est d'étudier la convergence de la série $\sum r_n$.

i) Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que $\forall t\in[k,k+1]$, $\dfrac{1}{(k+1)^2}\leq\dfrac{1}{t^2}\leq\dfrac{1}{k^2}$.

ii) En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier $N\geq n+1$:

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \le \int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^2} \le \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}.$$

iii) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\dfrac{1}{n+1} \le r_n \le \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

iv) Donner alors un équivalent de (r_n) lorsque n est au voisinage de $+\infty$. Que peut-on en conclure sur la nature de la série $\sum r_n$?

Solution : $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ *est fini, il est égal à* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

i) Les inégalités $\dfrac{1}{(k+1)^2} \le \dfrac{1}{t^2} \le \dfrac{1}{k^2}$ *proviennent des inégalités* $0 \le k \le t \le k+1$ *qui impliquent* $k^2 \le t^2 \le (k+1)^2$.

ii) On intègre les inégalités $\dfrac{1}{(k+1)^2} \le \dfrac{1}{t^2} \le \dfrac{1}{k^2}$ *pour* $t \in [k, k+1]$*, puis on fait la somme du résultat obtenu pour* $k = n+1$ *à* N.

iii) Maintenant on intègre $\dfrac{1}{t^2}$ *entre* $n+1$ *et* $N+1$ *: on obtient* $-\dfrac{1}{N+1} + \dfrac{1}{n+1}$*, ce qui fait* $\dfrac{1}{n+1}$ *quand* $N \to +\infty$*. Les inégalités de la question ii) impliquent donc*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \le \frac{1}{n+1} \le \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}.$$

Comme le terme de gauche vaut $r_n - \dfrac{1}{(n+1)^2}$ *et le terme de droite vaut* r_n*, on en déduit* $r_n \le \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)^2}$ *et* $\dfrac{1}{n+1} \le r_n$.

iv) En divisant par $\dfrac{1}{n}$*, on déduit de ces inégalités que* $\dfrac{r_n}{\frac{1}{n}}$ *tend vers* 1*, c'est à dire que* r_n *est équivalent à* $\dfrac{1}{n}$ *et par conséquent la série* $\sum r_n$ *diverge.*

Exercice 9.

Soit $u_n > 0$ le terme général d'une série.

a) Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{1+n^2u_n}$ est convergente.

b) Montrer que la série de terme général $w_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ est de la même nature que la série $\sum u_n$.

Solution : a) La série $\sum v_n$ *converge parce que* v_n *est plus petit que* $\dfrac{1}{n^2}$.

b) Les séries $\sum w_n$ *et* $\sum u_n$ *sont de même nature parce que* w_n *est équivalent à* u_n *(cette équivalence est évidente si* $\sum u_n$ *converge, parce qu'alors* $\dfrac{u_n}{w_n} = 1 + u_n$ *tend vers* 1 *du fait que* u_n *tend vers* 0 *; mais si on suppose que* $\sum w_n$ *converge, il faut d'abord démontrer que* u_n *tend vers* 0 *pour en déduire que* $\dfrac{u_n}{w_n} = 1 + u_n$ *tend vers* 1*).*