Corrigé – Analyse 2 (13 mai 2008)

Ex. I

o) Définir le rayon de convergence d'une série entrière.

C'est la borne supérieure de l'ensemble des réels r tels que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

i) Trouver le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$.

C'est 3.

ii) Montrer que la série converge uniformement si $|x| \leq 2$.

C'est parce que d'après le cours elle converge uniformément sur l'ensemble des x tels que $|x| \leq r$, à condition que r soit strictement plus petit que le rayon de convergence.

iii) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ (énoncer les résultats dont vous avez besoin).

Si on suppose connu le développement en série $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ on en déduit $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ et, en remplaçant x par $\frac{1}{3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n3^n} = -\log\frac{2}{3} = \log\frac{3}{2}$.

Ex. II

Trouver une solution en série pour l'équation différentielle $y''(x) + xy'(x) + y = 0$ telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Pour $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ l'équation différentielle équivaut à

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Dans la première de ces trois sommes, les deux premiers termes (correspondant à $n = 0$ et $n = 1$) sont nuls. Comme cette somme est égale à $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$, l'équation différentielle équivaut à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n\right) x^n = 0$$

d'où, tous les $(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n$ sont nuls, ce qui équivaut à

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Avec les conditions initiales de l'énoncé,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\cdots\cdot 5\cdot 3\cdot 1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Ex. III

0) Enoncer le théorème de Dirichlet pour les séries de Fourier, et énoncer l'égalité de Parseval.

Si la fonction 2π-périodique g est dérivable sur des intervalles $[c_i, c_{i+1}]$ recouvrant $\mathbb{R}$ (c'est à dire si la restriction de g à chacun de ces intervalles est dérivable) alors la somme de sa série de Fourier vaut $\frac{g(x_-) + g(x_+)}{2}$ (où $g(x_-)$ et $g(x_+)$ sont les limites de g à gauche et à droite de x).

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π périodique telle que $f(t) = |t|$ pour $t \in]-\pi, \pi]$.

1) Calculer la série de Fourier de g.

a_0 vaut $\frac{\pi}{2}$ et les autres a_n valent $-\frac{4}{n^2\pi}$ si n est impair, ou 0 si n est pair. Les b_n aussi valent 0 puisque la fonction $g(x)\sin(nx)$ est impaire.

2) Utiliser ce calcul pour calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

La première somme vaut $\frac{\pi^2}{8}$ et la seconde $\frac{\pi^4}{96}$.