Université d'Aix-Marseille I **Licence de Mathématiques, deuxième année**

Faculté des sciences, Saint Charles **TD intégration 1**

Corrigé de la feuille 5

0. On appelle "limite inf d'une suite u_n", la limite (quand $n \to +\infty$) de la borne inférieure de l'ensemble des u_k pour $k \geq n$.
On appelle "limite sup d'une suite u_n", la limite (quand $n \to +\infty$) de la borne supérieure de l'ensemble des u_k pour $k \geq n$.
L'énoncé correct du lemme de Fatou et sa démonstration se trouvent sur le polycop du cours (Théorème 10.5).

1. La plupart des limites d'intégrales s'obtiennent au moyen du théorème de convergence dominée (voir le cours juste après le lemme de Fatou, lequel n'est pas destiné à être utilisé dans les exercices mais est le passage obligé pour la démonstration dudit théorème)
a) On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{n \sin x}{x+n}$ avec $x \in [0, \pi]$.
Représentons ces fonctions pour $n = 1, 5, 10$ et 20 (la plus petite est f_1 et la plus grande f_{20}):
(voir à la fin).
Puis vérifions les trois conditions du théorème:
• chaque fonction f_n est Lebesgue-intégrable sur l'intervalle $[0, \pi]$ car continue (quotient de fonctions continues non nulles si $n \geq 1$);
• $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \sin x$ (parce que $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{\frac{x}{n}+1}$);
• $|f_n|$ est majorée par une fonction intégrable (sur $[0, \pi]$) qui ne dépend pas de n: par exemple la fonction constante $g(x) = 1$ puisque $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{\frac{x}{n}+1} \leq \dfrac{1}{1} = 1$.
Donc on peut utiliser ce théorème, et dire que la limite de $\displaystyle\int_0^\pi f_n$ est $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \, dx = 2$.

b) On applique le théorème de convergence dominée à $f_a(x) = e^{-a \sin x}$ avec $x \in [0, \pi]$. Ici on a $a \in \mathbb{R}$, $a \to +\infty$, on peut se limiter à $a \in \mathbb{R}^+$.
Représentons ces fonctions pour $a = 1, 2, 3, 4$ (la plus grande est f_1 et la plus petite f_4):
(voir à la fin).
Puis vérifions les trois conditions du théorème:
• chaque fonction f_a est Lebesgue-intégrable sur l'intervalle $[0, \pi]$;
• $\lim\limits_{a\to+\infty} f_a(x) = 0$ presque partout (plus précisément, sauf aux points $x = 0$ et $x = \pi$ où le sinus s'annule);
• $|f_a|$ est majorée par une fonction intégrable (sur $[0, \pi]$) qui ne dépend pas de a: par exemple la fonction constante $g(x) = 1$.
La limite de $\displaystyle\int_0^\pi f_a$ est donc $\displaystyle\int_0^\pi 0 \, dx = 0$.

c) On applique le théorème de convergence dominée à $f_a(x) = e^{-a \sin x}$ avec $x \in [0, \pi]$. Ici on a $a \in \mathbb{R}$, $a \to 0$, on peut se limiter à $a \in [-1, 1]$.
Représentons ces fonctions pour $a = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ (la plus petite est f_1 et la plus grande $f_{\frac{1}{4}}$):
(voir à la fin).
Puis vérifions les trois conditions du théorème:
• chaque fonction f_a est Lebesgue-intégrable sur l'intervalle $[0, \pi]$;
• $\lim\limits_{a\to 0} f_a(x) = 1$ pour tout $x \in [0, \pi]$;
• $|f_a|$ est majorée par une fonction intégrable (sur $[0, \pi]$) qui ne dépend pas de a: par exemple la

fonction constante $g(x) = e^1$ majore les $|f_a|$ pour $a \in [-1, 1]$.
La limite de $\int_0^\pi f_a$ quand $a \to 0$ est donc $\int_0^\pi 1\ dx = \pi$.

d) On applique le théorème de convergence dominée à $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n \sin x}$ avec $x \in [0, \pi]$.
Représentons ces fonctions pour $n = 1, 3, 5, 7$ (la plus grande est f_1 qui vaut 1, et celle dont la courbe est la plus proche de l'axe des x est f_7):
(voir à la fin).
Puis pour $n = 2, 4, 6, 8$ (f_2 est la fonction cosinus, et f_8 est celle dont la courbe est la plus proche de l'axe des x):
(voir à la fin).
Puis vérifions les trois conditions du théorème:
• chaque fonction f_n est Lebesgue-intégrable sur l'intervalle $[0, \pi]$ (après l'avoir prolongée par continuité en posant $f_n(0) = \lim_{x \to 0} f_n(x) = 1$ et $f_n(\pi) = \lim_{x \to \pi} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est pair;} \end{cases}$
• $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ presque partout parce que $-1 \leq \sin(nx) \leq 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n \sin x} = 0$ si $\sin x \neq 0$;
• $|f_n|$ est majorée par une fonction intégrable (sur $[0, \pi]$) qui ne dépend pas de n: on vérifie facilement par récurrence sur l'entier n, l'inégalité $|f_n(x)| \leq 1$ c'est à dire $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$, en utilisant la formule $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
La limite de $\int_0^\pi f_n$ quand $n \to +\infty$ est donc $\int_0^\pi 0\ dx = 0$.

2. a) $\displaystyle\int_0^1 nx^n f(x)\ dx = \left[n\frac{x^{n+1}}{n+1} f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 n\frac{x^{n+1}}{n+1} f'(x)\ dx.$
Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de convergence dominée à la seconde intégrale, compte tenu que $\left| n\dfrac{x^{n+1}}{n+1} f'(x) \right| \leq |f'(x)| =$ fonction intégrable sur $[0, 1]$, indépendante de n.
On conclut que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 nx^n f(x)\ dx = f(1) - \int_0^1 0\ dx = f(1)$.

b) Cette fois f est supposée continue en $x = 1$; on utilise donc les réels $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\text{si } |x - 1| \leq \alpha, \text{ alors } |f(x) - f(1)| \leq \varepsilon,$$

(où ε peut être choisi comme on veut, et α dépend de ε). D'après la relation de Chasles,

$$\int_0^1 nx^n f(x)\ dx = \int_0^{1-\alpha} nx^n f(x)\ dx + \int_{1-\alpha}^1 nx^n f(x)\ dx,$$

où on peut utiliser l'inégalité $|f(x) - f(1)| \leq \varepsilon$ seulement dans la deuxième intégrale.
La première intégrale tend vers 0 parce que sa valeur absolue est plus petite que $n(1-\alpha)^n \displaystyle\int_0^{1-\alpha} |f(x)|\ dx$, compte tenu qu'on a supposé $|f|$ intégrable, et

$$\lim_{n \to +\infty} n(1 - \alpha)^n = \lim_{n \to +\infty} e^{\mathrm{Log} n} e^{n \mathrm{Log}(1-\alpha)} = \lim_{n \to +\infty} e^{n\left(\frac{\mathrm{Log} n}{n} + \mathrm{Log}(1-\alpha)\right)} = 0.$$

La seconde intégrale est comprise entre $\displaystyle\int_{1-\alpha}^1 nx^n(f(1) - \varepsilon)\ dx$ et $\displaystyle\int_{1-\alpha}^1 nx^n(f(1) + \varepsilon)\ dx$ qu'on peut calculer puisque $f(1) \pm \varepsilon$ est constante; ces deux dernières intégrales (après qu'on les ait calculées) tendent respectivement vers $f(1) - \varepsilon$ et $f(1) + \varepsilon$ quand $n \to +\infty$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on conclut que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 nx^n f(x)\ dx = f(1)$.

3. Cet exercice utilise la limite classique $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
(rappelons que $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ *est égal à* $e^{n \mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$*, qui tend vers* e *parce que Log* $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ *est équivalent à* $\dfrac{1}{n}$*, c'est à dire* $n\mathit{Log}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\mathit{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 1$*).*

On remarque d'abord que $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{f(x)}{x}\, dx$: c'est dû au fait que la fonction $G(t) = \int_1^t \frac{f(x)}{x}\, dx$, comme toute primitive de fonction intégrable, est continue.
Ensuite, par le changement de variable $x = t^n$ on obtient

$$\int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{f(x)}{x}\, dx = n \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{f(t^n)}{t}\, dt, \qquad (*)$$

ce qui n'est pas exactement ce qu'on veut: on veut obtenir $n \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t^n)\, dt$. Il suffit de comparer ces deux dernières intégrales, compte tenu que t est compris entre 1 et $1 + \frac{1}{n}$ (qui tend vers 1).
On a (dans le cas où f est positive)

$$\begin{aligned} n \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t^n)\, dt &= n \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{f(t^n)}{t} t\, dt \\ &\leq n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{f(t^n)}{t}\, dt \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{f(x)}{x}\, dx \quad \text{(d'après } (*)) \\ &\to \int_1^e \frac{f(x)}{x}\, dx \end{aligned}$$

et, comme $1 \geq \frac{1}{t}$,

$$\begin{aligned} n \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t^n)\, dt &\geq n \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{f(t^n)}{t}\, dt \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{f(x)}{x}\, dx \quad \text{(d'après } (*)) \\ &\to \int_1^e \frac{f(x)}{x}\, dx \end{aligned}$$

donc finalement $\lim_{n\to+\infty} n \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t^n)\, dt = \int_1^e \frac{f(x)}{x}\, dx$. Si f n'est pas positive, on sait que $f = f^+ - f^-$ avec $f^+ = \max\{f, 0\}$ et $f^- = \max\{-f, 0\}$ (fonctions continues positives); il suffit donc d'utiliser le résultat, qui est valable pour les fonctions f^+ et f^-.

4. On veut dériver $\varphi(t) = \int_0^1 f(x)\sin(xt)\, dx$; vérifions les trois conditions du théorème de dérivation sous le signe "intégrale" (théorème 10.8):
• la fonction $\psi(x,t) = f(x)\sin(xt)$ est Lebesgue-intégrable pour $x \in [0,1]$ car $|f(x)\sin(xt)| \leq |f(x)xt| = |t| \cdot |f(x)x|$, où $|t|$ est constante et on a supposé $|xf(x)|$ intégrable;
• elle est dérivable par rapport à t;
• sa dérivée par rapport à t vaut $xf(x)\cos(xt)$, laquelle est majorée en valeur absolue par $|xf(x)|$, qui est intégrable et ne dépend pas de t.
Le théorème s'applique et

$$\varphi'(t) = \int_0^1 xf(x)\cos(xt)\, dx. \qquad (**)$$

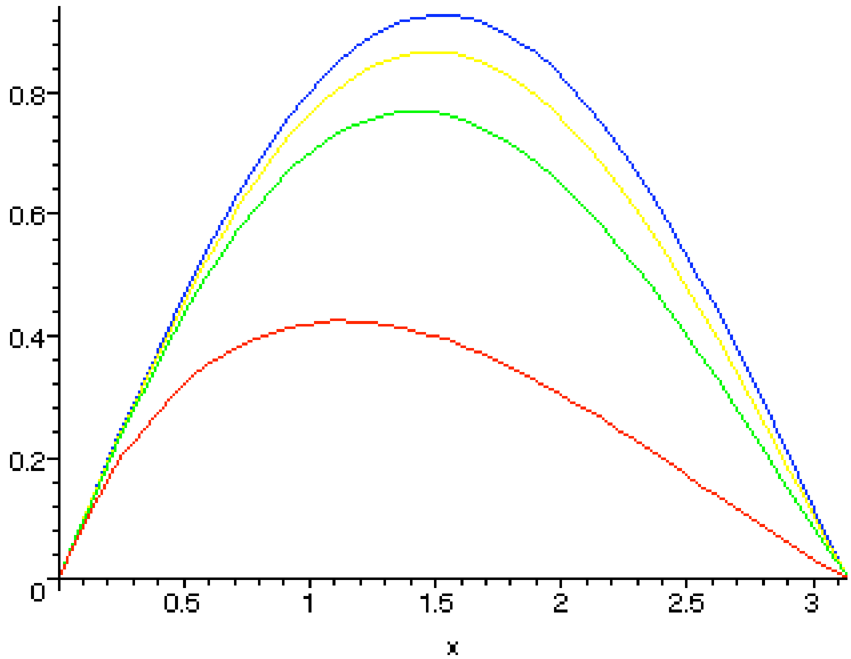
Application: la fonction $t \mapsto \int_0^1 \frac{\sin(xt)}{x}\, dx$ est égale à la fonction φ qu'on vient d'étudier, quand f est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Cette dernière vérifie la condition de l'énoncé c'est à dire, $|xf(x)|$ est intégrable puisque $|xf(x)| = 1$. Donc, d'après $(**)$,

$$\varphi'(t) = \int_0^1 x\frac{1}{x}\cos(xt)\, dx = \int_0^1 \cos(xt)\, dx = \left[\frac{\sin(xt)}{t}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\sin t}{t}.$$

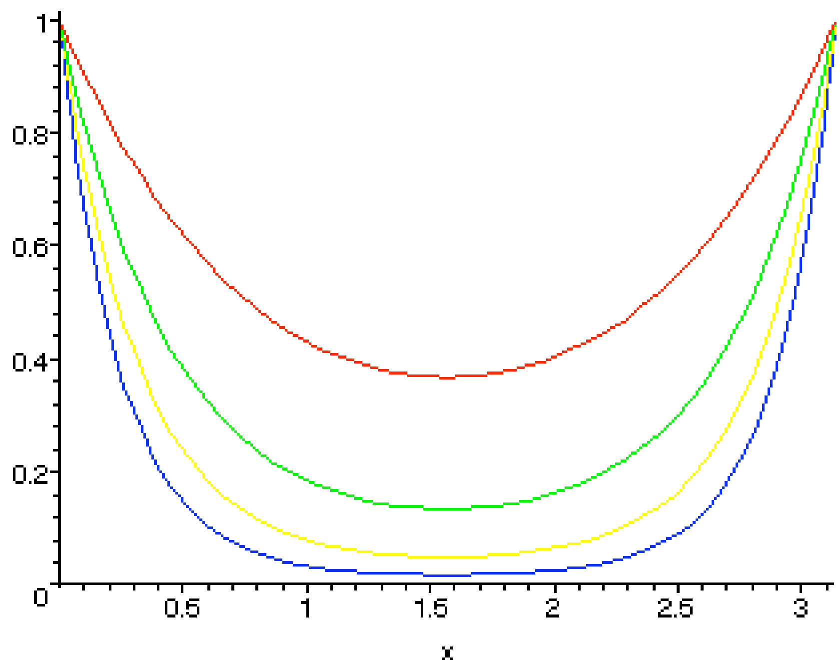
Remarquons que la fonction φ, c'est à dire la primitive de $\frac{\sin t}{t}$, n'est pas calculable c'est à dire ce n'est pas une composée de fonctions usuelles.
Courbe de φ:
(voir à la fin).

5. Représentons les f_n pour $n = 2, 3, 4, 5$:
(voir à la fin).
La limite de f_n est nulle c'est à dire, pour tout $x \in [0, 1]$ fixé, $f_n(x)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Vérifions-le:
si n est strictement plus grand que la partie entière de $\frac{2}{x}$, alors $n > \frac{2}{x}$, donc $\frac{2}{n} < x \leq 1$, et d'après l'énoncé $f_n(x)$ vaut 0, ce qui prouve bien (d'après la définition de la limite d'une suite) que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Mais le calcul de $\int_0^1 f_n$ donne $\int_0^1 f_n = 1$. On en déduit:
a) qu'il n'existe pas de fonction intégrable g telle que $|f_n| \leq g$ pour tout n: si cette fonction existait on pourrait appliquer le théorème de convergence dominée, et $\int_0^1 f_n$ tendrait alors vers 0 et non vers 1.
b) que la fonction $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ n'est pas intégrable: si elle l'était, elle servirait de fonction g pour majorer $|f_n| = f_n$ et on pourrait appliquer le théorème de convergence dominée.

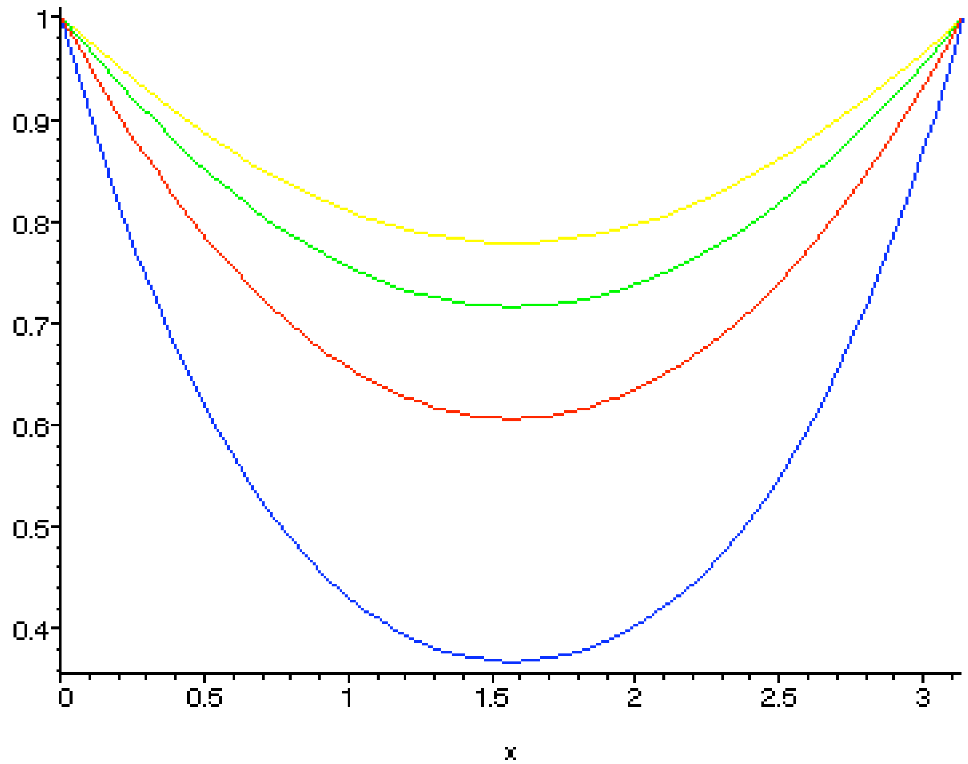
Première intégrale de l'exercice 1 :



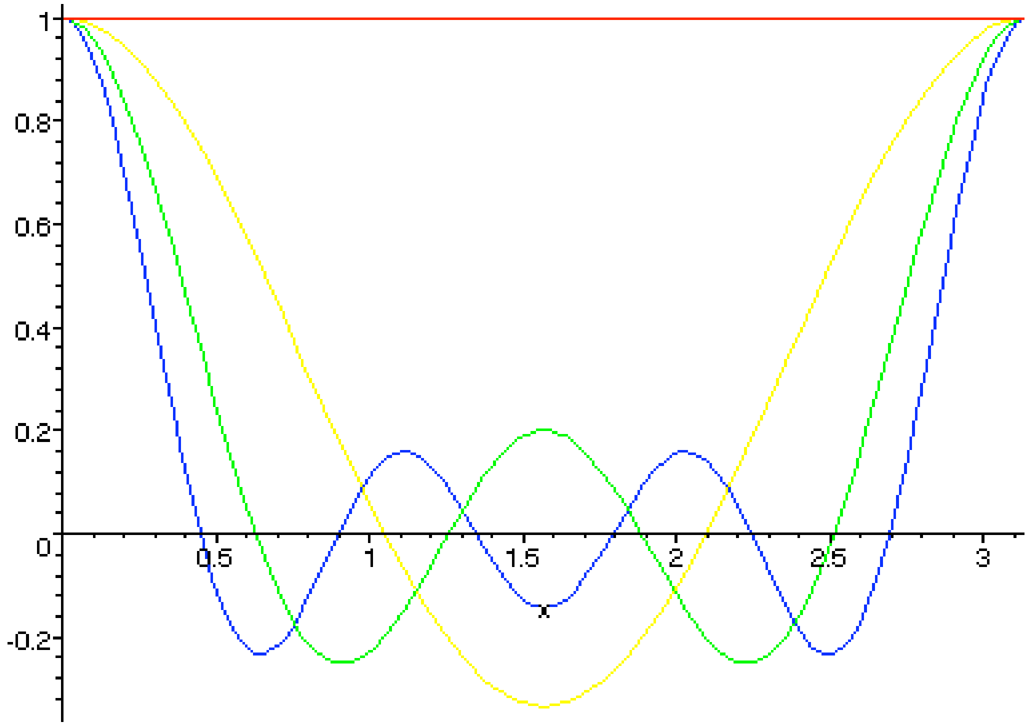
Deuxième intégrale :



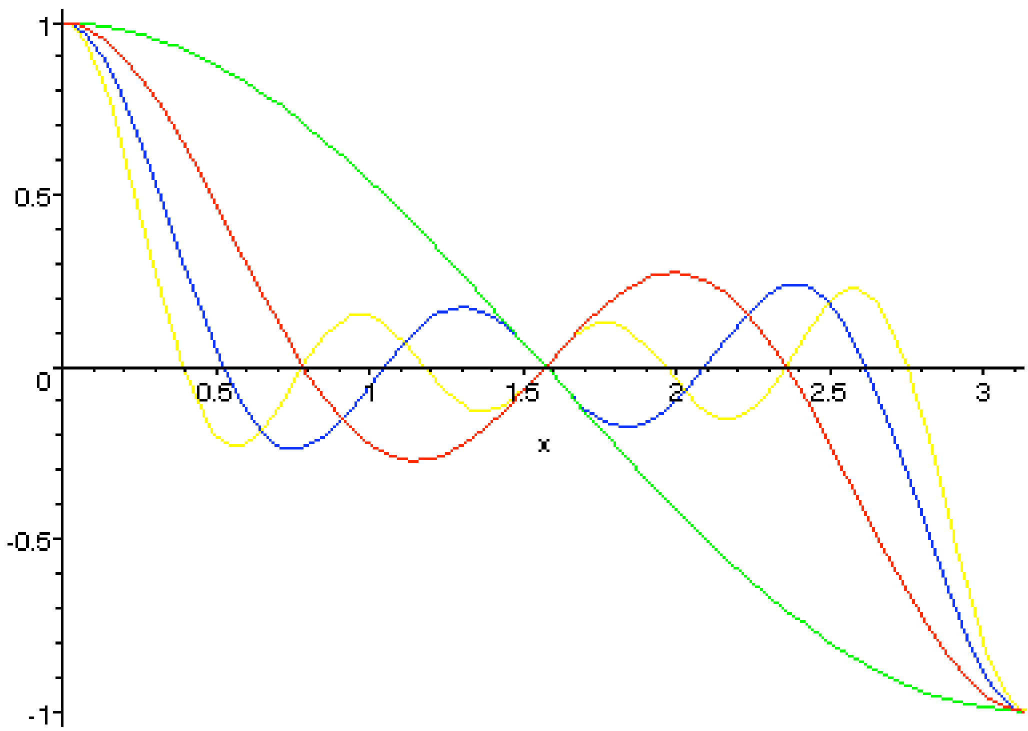
Troisième intégrale :



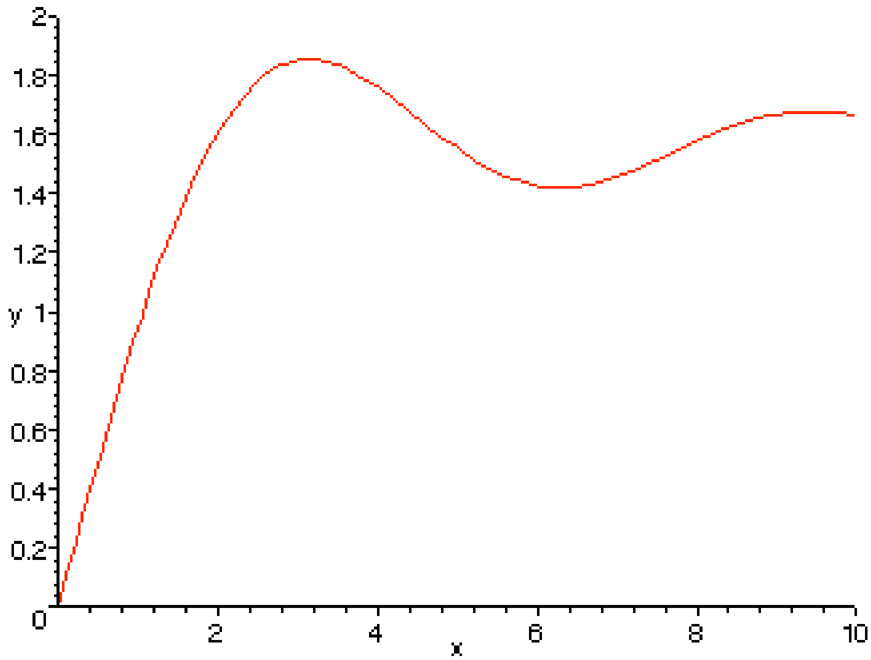
Quatrième intégrale (avec des indices impairs):



Quatrième intégrale (avec des indices pairs):



Exercice 4 (application):



Exercice 5 :