Université d'Aix-Marseille I **Licence de mathématiques,** deuxième année

Faculté des sciences, Saint Charles **TD intégration 1**

Corrigé de la feuille 3

1. Dans cet exercice on utilise la formule d'intégration par parties :

$$\int F'G = FG - \int FG'.$$

On choisit F et G de façon que la fonction FG' soit plus facile à intégrer que la fonction $F'G$. Si une seule d'intégration par parties ne suffit pas on en fait deux :
$\int U''V = U'V - \int U'V'$ puis $\int U'V' = UV' - \int UV''$.

On obtient
$\int e^x \cos x \; dx = e^x \; \dfrac{\cos x + \sin x}{2} + C$ (en posant $U'' = e^x$ et $V = \cos x$, ou le contraire),
$\int \dfrac{\text{Log } x}{x^n} \; dx = -\dfrac{1 + (n-1)\text{Log } x}{(n-1)^2 x^{n-1}} + C$ (en posant $F' = x^{-n}$ et $G = \text{Log} x$),
$\int x \arctan x \; dx = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1+x^2}{2} \arctan x + C$ (en posant $F' = x$ et $G = \arctan x$),
$\int (x^2 + x + 1)e^x \; dx = (x^2 - x + 2)e^x + C$ (en posant $U'' = e^x$ et $V = x^2 + x + 1$).

2. a) On fait d'abord le changement de variable $t = \sqrt[6]{2+x}$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} \; dx = \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} \; dt = \int \frac{6t^3}{t+1} \; dt \;=\; \int \left(6t^2 - 6t + 6 - \frac{6}{t+1}\right) dt$$
$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\text{Log}|1+t| + C.$$

Puis on remplace t par $\sqrt[6]{2+x}$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} \; dx = 2\sqrt{2+x} \; - 3\sqrt[3]{2+x} \; + 6\sqrt[6]{2+x} \; - 6\text{Log}\left|1 + \sqrt[6]{2+x}\right| + C.$$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\left((x-1)^2 - 4\right)^2} \; dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{\left(u^2 - 1\right)^2} \; du$ (avec $u = \dfrac{x-1}{2}$),
$\dfrac{1}{\left(u^2-1\right)^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(u+1)^2} + \dfrac{1}{(u-1)^2} + \dfrac{1}{u+1} - \dfrac{1}{u-1}\right)$, qu'on intègre. On obtient
$\displaystyle\int \frac{1}{\left((x-1)^2 - 4\right)^2} \; dx = \frac{1-x}{8(x+1)(x-3)} + \frac{1}{32}\text{Log}\left|\frac{x+1}{x-3}\right| + \; C.$

c) $\displaystyle\int (\arcsin x)^2 \; dx \; = x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C$
(avec $x = \; \sin t, \; t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$).

d) $\displaystyle\int x^2 \sqrt{1+x^3} \; dx = \frac{2}{9}\sqrt{(1+x^3)^3} + C.$

3. $\displaystyle\int_0^{\text{Log } 2} \sqrt{e^x - 1} \; dx = \int_{e^0 - 1}^{e^{\text{Log } 2} - 1} \sqrt{t} \; \frac{dt}{t+1}$ (avec $t = e^x - 1$)
$\displaystyle= \int_0^1 u \; \frac{2udu}{u^2+1}$ (avec $t = u^2$).
$u \; \dfrac{2u}{u^2+1} = 2 - \dfrac{2}{u^2+1}$ donc

$$\int_0^{\text{Log } 2} \sqrt{e^x - 1}\ dx = [2u - 2\arctan u]_{u=0}^{u=1} = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

4. (a) L'intégrale $\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(a-x)(b-x)\ dx$ est de la forme $\int_a^b U''V$. Si on l'intègre par parties $\int_a^b U''V$, deux fois de suite, on obtient la relation

$$\int_a^b U''V = [U'V]_a^b - [UV']_a^b + \int_a^b UV''.$$

Comme $U = f$ et $V = \dfrac{(a-x)(b-x)}{2}$, on a donc

$$\int_a^b f''(x)\ \frac{(a-x)(b-x)}{2}\ dx \ = \ \left[f'(x)\ \frac{(a-x)(b-x)}{2}\right]_a^b - \left[f(x)\ \frac{2x-a-b}{2}\right]_a^b + \int_a^b f(x)\ dx.$$

Le premier terme entre crochets est nul. Après avoir simplifié le second on a

$$\int_a^b f(x)\ dx \ = \ \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(a-x)(b-x)dx.$$

(b) Majoration de l'intégrale de f en fonction de $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f''(x)$:

$$\int_a^b f(x)\ dx \ \le \ \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + \frac{1}{2}\int_a^b M\left|(a-x)(b-x)\right| dx.$$

On calcule cette dernière intégrale (compte tenu que $|(a-x)(b-x)| = (x-a)(b-x) = -x^2 + (a+b)x - ab$ pour $x \in [a,b]$). D'où (par simplification)

$$\int_a^b f(x)\ dx \ \le \ \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + M\frac{(b-a)^3}{12}.$$

De même $\int_a^b f(x)\ dx \ \ge \ \dfrac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + m\dfrac{(b-a)^3}{12}$
avec $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f''(x)$.

5. (a) $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\ dt = \int F'G$ avec $F'(t) = 1$ et $G(t) = (1-t^2)^n$. En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} I_n &= [t(1-t^2)^n]_0^1 - \int_0^1 nt(1-t^2)^{n-1}(-2t)\ dt \\ &= -2n\int_0^1 (1-t^2)^{n-1}(-t^2+1-1)\ dt \\ &= -2n\int_0^1 (1-t^2)^n\ dt + 2n\int_0^1 (1-t^2)^{n-1}\ dt \\ &= -2nI_n + 2nI_{n-1} \end{aligned}$$

d'où $I_n + 2nI_n = 2nI_{n-1}$ et $I_n = \dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1}$.

(b)
$$\begin{aligned} I_n &= \frac{I_n}{I_{n-1}}\frac{I_{n-1}}{I_{n-2}}\frac{I_{n-2}}{I_{n-3}}\cdots\frac{I_1}{I_0}I_0 \\ &= \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}I_0 \end{aligned}.$$

Compte tenu que
$I_0 = 1$,
$(2n)(2n-2)(2n-4)\ldots 2 = 2n\cdot 2(n-1)\cdot 2(n-2)\cdot\cdots\cdot 2 = 2^n\cdot n!$,
$(2n+1)(2n-1)(2n-3)\ldots 3 =$ produit des nombres impairs jusqu'à $2n+1$
$= \dfrac{(2n+1)!}{\text{produit des nombres pairs jusqu'à } 2n} = \dfrac{(2n+1)!}{2^n\cdot n!}$, la valeur de I_n est

$$I_n = \frac{(2^n\cdot n!)^2}{(2n+1)!}.$$

(c) Comme la formule du binôme permet de calculer

$(1-t^2)^n = (-t^2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-t^2)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k t^{2k}$, on a

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, \frac{(-1)^k}{2k+1} \ .$$

On déduit de cette égalité, et de celle de la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k = \frac{(2^n \cdot n!)^2}{(2n+1)!}.$$

6. D'après le formulaire pages 24 et 25,

$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+5} \ dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}} + C$

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-5}} \ dx = \ln(x+\sqrt{x^2-5}) + C$

$\displaystyle\int e^x \sin(e^x) \ dx = -\cos(e^x) + C$

$\displaystyle\int \tan^3 x \ dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + \mathrm{Log}|\cos x| + C$

$\displaystyle\int \frac{1}{\tan^3 x} \ dx = -\frac{1}{2\tan^2 x} - \mathrm{Log}|\sin x| + C$

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m} \ dx = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-m)(x^2+3x+7)^{m-1}} + C & \text{si } m \neq 1 \\ \\ \mathrm{Log}(x^2+3x+7) + C & \text{si } m = 1 \end{cases}$$

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{Log}\ x}{x} \ dx = \frac{\mathrm{Log}^2 x}{2} + C$

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{ch}\ x}{\mathrm{sh}^5 x} \ dx = -\frac{1}{4\mathrm{sh}^4 x} + C.$

7.

(a) Comme $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est continue et strictement croissante,
il existe f^{-1} bijection strictement croissante de $[f(a), f(b)]$ sur $\mathbf{R}$.
Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, f^{-1} aussi.

(b) On fait le changement de variable $t = f(x)$ dans l'intégrale
$I_2 = \displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t) \ dt \quad$ (où $t \in [f(a), f(b)]$, donc $x \in [a,b]$).
On obtient :

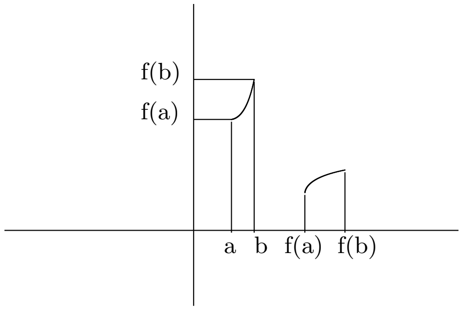
$$I_2 = \int_a^b f^{-1}(f(x)) f'(x) \ dx = \int_a^b x f'(x) \ dx$$

puis on intégre par parties :

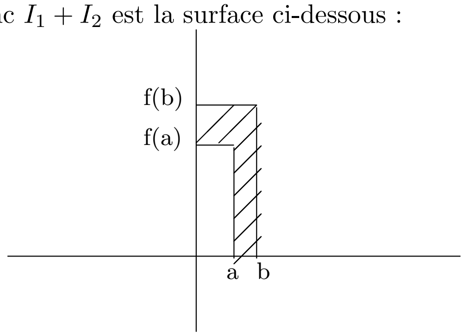
$$\int_a^b x f'(x) \ dx = [x f(x)]_a^b - \int_a^x f(x) \ dx \ .$$

Ce qui fait $I_2 = bf(b) - af(a) - I_1$.

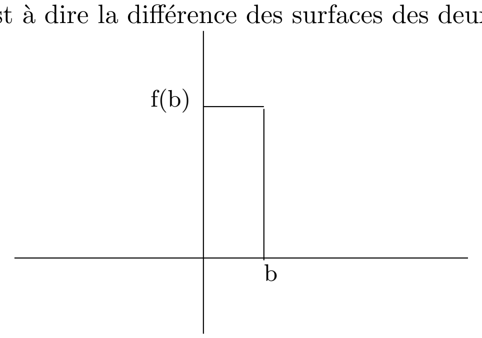
(c)



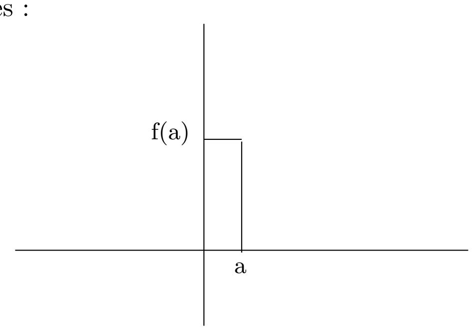
À gauche on a la courbe de f et, en dessous de cette courbe, la surface I_1.
À droite on a la courbe de f^{-1} et, en dessous de cette courbe, la surface I_2.
Mais on retrouve cette surface en haut à gauche.
Donc $I_1 + I_2$ est la surface ci-dessous :



c'est à dire la différence des surfaces des deux rectangles :



moins



$$I_1 + I_2 = bf(b) - af(a).$$

8. a) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x(x-1)^3}\,dx = x - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + 4\ln|x-1| - \ln|x| + C.$
La méthode classique utilisée quand un des pôles est d'ordre ≥ 3, est une division suivant les puissances croissantes. Ici le pôle 1 est d'ordre 3, c'est à dire il est racine triple du dénominateur. Faisons le changement de variable $x = 1+h$. Il s'agit donc de diviser $(1+h)^4+1 = 2+4h+6h^2+4h^3+h^4$ par $(1+h)h^3$.

$2+4h+6h^2+4h^3+h^4$	$1+h$
$-(2+2h)$	$2+2h+4h^2$
$2h+6h^2+4h^3+h^4$	
$-(2h+2h^2)$	
$4h^2+4h^3+h^4$	
$-(4h^2+4h^3)$	
h^4	

d'où $\displaystyle\frac{(1+h)^4+1}{(1+h)h^3} = \frac{1}{(1+h)h^3}\Big((1+h)(2+2h+4h^2)+h^4\Big) = \frac{2}{h^3}+\frac{2}{h^2}+\frac{4}{h}+\frac{h}{1+h}$. Il ne reste plus qu'à rempacer h par $x-1$ et à intégrer.

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^4+1)^2}\ dx = \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3\sqrt{2}}{16} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{3\sqrt{2}}{16} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C.$

La méthode classique utilise les racines du polynôme x^4+1 :

$$x^4+1 = \left(x-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(x-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(x-e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)\left(x-e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right).$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(x^4+1)^2} = \frac{a_1}{\left(x-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2} + \frac{b_1}{x-e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{a_2}{\left(x-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2} + \frac{b_2}{x-e^{-i\frac{\pi}{4}}} + \frac{a_3}{\left(x-e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)^2} + \frac{b_3}{x-e^{3i\frac{\pi}{4}}} + \frac{a_4}{\left(x-e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right)^2} + \frac{b_4}{x-e^{-3i\frac{\pi}{4}}}$$

La méthode rapide est plus spécifique : $\displaystyle\int \frac{1}{(x^4+1)^2}\ dx = \int \frac{4x^3}{(x^4+1)^2}\ \frac{1}{4x^3}\ dx$; $\dfrac{4x^3}{(x^4+1)^2}$ est la dérivée de $-\dfrac{1}{x^4+1}$, on peut donc intégrer par parties et on obtient

$$\int \frac{1}{(x^4+1)^2}\ dx = -\frac{1}{4(x^4+1)x^3} - \frac{3}{4}\int \frac{1}{(x^4+1)x^4}\ dx.$$

Comme $\dfrac{1}{(x^4+1)x^4} = \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{x^4+1} = \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{x+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(x^2+x\sqrt{2}+)1} + \dfrac{x-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(x^2-x\sqrt{2}+1)}$, sa primitive s'exprime au moyen des fonctions logarithme et arctangente.

c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+x^2+1}\ dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\ \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

Méthode : on fait $x^4+x^2+1 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+1+x)(x^2+1-x)$
puis $\dfrac{x}{x^4+x^2+1} = \dfrac{1}{2(x^2+1-x)} - \dfrac{1}{2(x^2+1+x)}$.

d) $$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)(x^2-2x-2)^2}\ dx \quad &= \quad \frac{1}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{18}\ln|x^2-2x-2| \\ &\quad -\frac{1}{6(x^2-2x-2)} + C.\end{aligned}$$

Méthode : on peut faire la division euclidienne de $(x^2-2x-2)^2$ par $x-\ 1$:

$$(x^2-2x-2)^2 = (x-1)(x^3-3x^2-3x+5)+9$$

d'où l'identité de Bezout

$$1 = \frac{1}{9}\Big((x^2-2x-2)^2 - (x-1)(x^3-3x^2-3x+5)\Big).$$

En divisant par $(x-1)(x^2-2x-2)^2$ on en déduit

$$\frac{1}{(x-1)(x^2-2x-2)^2} = \frac{1}{9(x-1)} - \frac{x^3-3x^2-3x+5}{9(x^2-2x-2)^2}$$

et il suffit de faire la division euclidienne de x^3-3x^2-3x+5 par x^2-2x-2, pour obtenir la décomposition en éléments simples.

e) $$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}\ dx \quad &= \quad \frac{1}{5}\ln|x+2| - \frac{1}{10}\ln(x^2+2x+5) \\ &\quad +\frac{1}{10}\arctan\frac{x+1}{2} + C.\end{aligned}$$

Même méthode.

f) $\displaystyle\int \frac{2x}{(1-x+x^2)^2}\ dx = \frac{2(x-2)}{3(1-x+x^2)} + \frac{4\sqrt{3}}{9} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$

Méthode : cette fraction n'a pas besoin d'être décomposée en éléments simples : elle est elle-même un élément simple. Pour l'intégrer, la méthode classique consiste à faire apparaître la forme u^2+1 au dénominateur :

$$\begin{aligned} 1-x+x^2 \quad &= \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= \quad \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\right) \\ &= \quad \frac{3}{4}\left(u^2+1\right) \quad \text{avec } u = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

On a donc $2x = 1 + u\sqrt{3}$, d'où $dx = u\dfrac{\sqrt{3}}{2}du$ et

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x}{(1-x+x^2)^2}\ dx &= \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1+u\sqrt{3}}{(u^2+1)^2}\ du \\
&= \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\ du + \frac{4}{3}\int \frac{2u}{(u^2+1)^2}\ du \\
&= \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\ du - \frac{4}{3(u^2+1)} + C.
\end{aligned}$$

Il reste à faire $u = \tan\theta$ dans l'intégrale $\displaystyle\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\ du$, ce qui fait $du = (\tan^2\theta + 1)d\theta$ et

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\ du &= \int \frac{1}{\tan^2\theta+1}\ d\theta \\
&= \int \cos^2\theta\ d\theta \\
&= \int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\ d\theta \\
&= \frac{\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}}{2} + C.
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer θ par $\arctan u$ c'est à dire par $\arctan \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$, puis à calculer $\sin(2\theta)$ au moyen de la formule $\sin(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$.

g) $$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+4)}\ dx &= -\frac{1}{5(x-1)} + \frac{8}{25}\ln|x-1| - \frac{4}{25}\ln(x^2+4) \\
&\quad + \frac{6}{25}\arctan\frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

Méthode : $\dfrac{x^2}{(x-1)^2(x^2+4)} = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{cx+d}{x^2+4}$.
Le dénominateur s'annule en $x = 1$ et en $x = \pm 2i$.
$a = \left(\dfrac{x^2}{x^2+4}\right)_{x=1} = \dfrac{1}{5}$ et $2ic + d = \left(\dfrac{x^2}{(x-1)^2}\right)_{x=2i} = \dfrac{-16i+12}{25}$.
D'où $a = \dfrac{1}{5}$, $c = -\dfrac{8}{25}$, $d = \dfrac{12}{25}$ et, en faisant $x = 0$, $b = \dfrac{8}{25}$. Puis on utilise la formule $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\ dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$.