

Rappels et solutions – Séries de Fourier

Rappels (<http://mathworld.wolfram.com/FourierSeries.html>) sur les séries de Fourier et la règle de Dirichlet:

Toute fonction continument dérivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de période 2π s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (1)$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (2)$$

En utilisant l'exponentielle complexe, ceci équivaut à $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$

avec $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$. La relation entre les c_n et les a_n, b_n est:

$$c_n = (a_n - ib_n)/2 \quad \text{si } n \geq 0,$$

$$c_n = \overline{c_{-n}} \quad \text{si } n \leq 0.$$

Si on suppose seulement que f est continument dérivable par morceaux, la série de Fourier de f (c'est à dire le second membre dans la for-

mule (1)) n'est pas égale à $f(x)$ mais à $\frac{1}{2} \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) + \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) \right)$

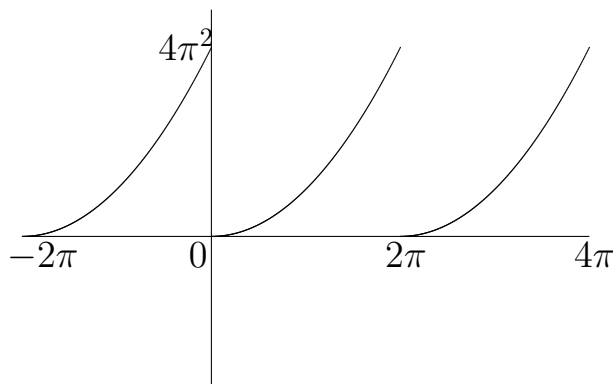
Dans ces formules, on peut remplacer l'intégrale de $-\pi$ à π (de toute fonction 2π -périodique) par son intégrale de a à $a + 2\pi$ (ce qu'on peut vérifier par le changement de variable $x = -\pi - a + t$) quelque soit le réel a . D'autre part, si f est paire ses b_n sont nuls, et si f est impaire ses a_n sont nuls.

Exercice 3. Pour obtenir la série de Fourier de $\sin^2 x$, le plus simple est d'utiliser la formule trigonométrique:

$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$ d'où $a_0 = 1$ et $a_2 = -\frac{1}{2}$; les autres coefficients sont nuls.

Pour obtenir celle de $\cos^3 x$ on utilise les formules $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$ et $\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$, d'où $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos(3x)$. L'autre méthode consiste à utiliser les formules (2).

Exercice 4. Fonction 2π -périodique f valant x^2 sur $[0, 2\pi[$:



D'après (1) on a, pour tout $x \in]0, 2\pi[$,

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos(nx) - \frac{4\pi}{n} \sin(nx) \right).$$

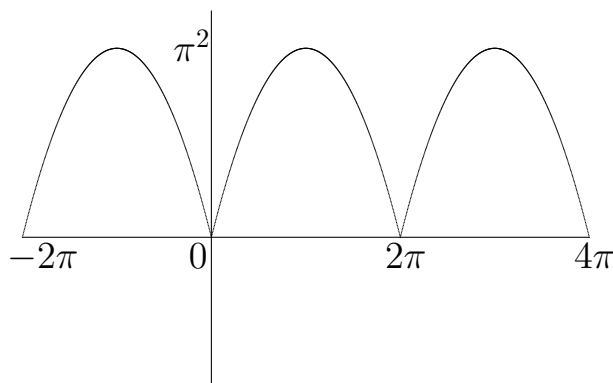
Dans le cas $x = 0$, f est discontinue: il faut donc remplacer ci-dessus (d'après la règle de Dirichlet) x^2 par $\frac{1}{2}(4\pi^2 + 0) = 2\pi^2$.

Cette série converge en tout point $x \in \mathbb{R}$ (vers $f(x)$ si $x \neq 2k\pi$, et vers $2\pi^2$ si $x = 2k\pi$). Elle converge uniformément sur tout intervalle fermé inclus dans le domaine de continuité de f , c'est à dire sur les intervalles $[a, b] \subset]2k\pi, 2(k+1)\pi[$.

En faisant successivement $x = 0$, $x = \pi$ et $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 5. Fonction 2π -périodique f valant $x(2\pi - x)$ sur $[0, 2\pi[$:



D'après (1), pour tout $x \in]0, 2\pi[$,

$$x(2\pi - x) = \frac{2\pi^2}{3} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} \cos(nx).$$

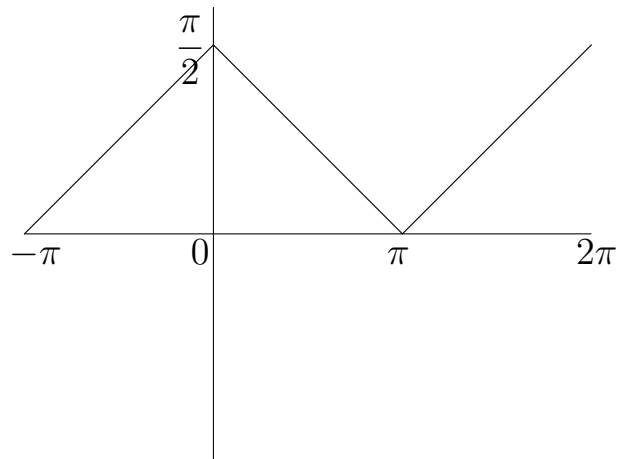
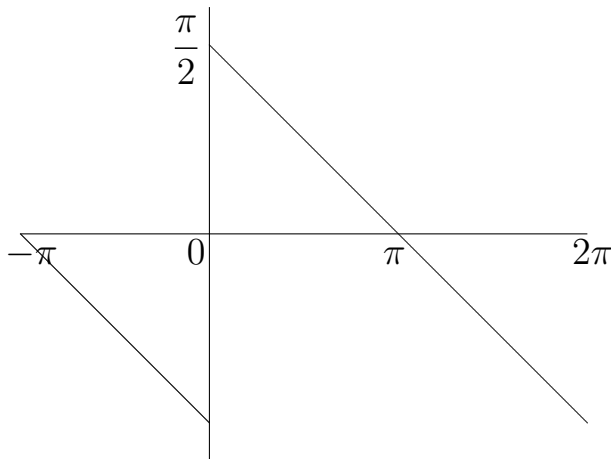
Cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle vérifie les deux conditions de convergence normale: $\left| \frac{4}{n^2} \cos(nx) \right| \leq \frac{4}{n^2}$ (indépendant

de x) et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} < +\infty$.

L'égalité de Parseval $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ implique

$$\frac{48\pi^4}{45} = \frac{8\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4} \text{ donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 6. Fonctions f et g valant $\frac{\pi - x}{2}$ sur l'intervalle $]0, \pi]$; mais f est impaire et g est paire.

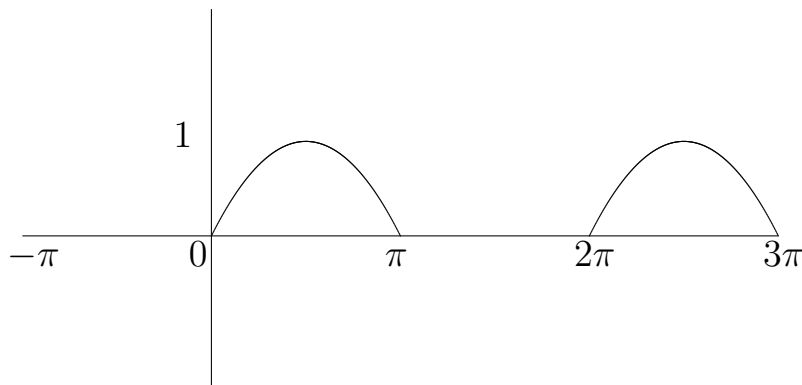


D'après (1),

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)^2} \cos((2n+1)x)$$

sont égaux à $\frac{\pi - x}{2}$ pour tout $x \in]0, \pi]$. La première série converge uniformément sur tout intervalle $[a, b]$ inclus dans $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ (intervalle du domaine de continuité de f), et la seconde converge uniformément sur $\mathbb{R}$ puisque $\left| \frac{2}{\pi(2n+1)^2} \cos((2n+1)x) \right|$ est inférieur à $\frac{1}{n^2}$.

Exercice 7. Cette fonction 2π -périodique f vaut $\sin x$ pour tout $x \in [0, \pi[$ et vaut 0 pour tout $x \in [-\pi, 0[$:



D'après (1), pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi(4k^2 - 1)} \cos(2kx);$$

autrement dit les a_n sont nuls pour $n = 2k+1$ et ils valent $-\frac{2}{\pi(4k^2 - 1)}$

pour $n = 2k$; parmi les b_n , seul $b_1 = \frac{1}{2}$ n'est pas nul. La convergence

est uniforme puisque $\left| \frac{2}{\pi(4k^2 - 1)} \cos(2kx) \right| \leq \frac{1}{k^2}$ pour tout $k \geq 1$.

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi(4k^2 - 1)} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 8. La condition pour que la fonction

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx) (\beta_n \cos(nt) + \gamma_n \sin(nt)) \quad ((x, t) \in [0, \pi] \times [0, +\infty[)$$

soit dérivable deux fois (par rapport à x ou par rapport à t), c'est que ses dérivées partielles formelles d'ordre inférieur ou égal à 2 convergent uniformément sur les pavés bornés $[0, \pi] \times [0, T]$.

Rappel: étant donné une série $\phi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(x, t)$, on appelle dérivées

partielles formelles les séries obtenues en dérivant ses termes:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(x, t), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(x, t), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t}(x, t), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2}(x, t), \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2}(x, t), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x \partial t}(x, t), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t \partial x}(x, t) \end{aligned}$$

sont les dérivées partielles formelles d'ordre ≤ 2 .

Elles sont alors égales aux dérivées partielles de ϕ .

Ici on a appliqué ce théorème à $\varphi_n(x, t) = \sin(nx) (\beta_n \cos(nt) + \gamma_n \sin(nt))$.

Comme la dérivée seconde de cette fonction par rapport à t est égale

à sa dérivée seconde par rapport à x , on a

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Remarquons que $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin(nx)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\gamma_n \sin(nx)$.

Appellons $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ ces deux fonctions; leurs coefficients de Fourier sont respectivement $\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = \beta_n \end{cases}$ et $\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = n\gamma_n. \end{cases}$