Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licence de Mathématiques
2013-2014

MATHEMATIQUES 01

Correction du Partiel 1 – 18 Octobre 2013

EXERCICE 1

On considère les assertions suivantes.
$(A)\ : \forall x \in \mathbb{R}, x \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 9 \quad (B)\ : \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4$ et $(C)\ : \forall x \in \mathbb{R}, x \leq 3 \Rightarrow 2^x \leq x^2$.

1. Leur contraposés sont :

- Contraposé de (A) : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$.
- Contraposé de (B) : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 4 \Rightarrow x < 2$.
- Contraposé de (C) : $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x > x^2 \Rightarrow x > 3$.

2. Leur négations sont :

- Négation de (A) : $\exists x \in \mathbb{R}, x \leq 3 \ \ et \ \ x^2 > 9$.
- Négation de (B) : $\exists x \in \mathbb{R}, x \geq 2 \ \ et \ \ x^2 < 4$.
- Négation de (C) : $\exists x \in \mathbb{R}, x \leq 3 \ \ et \ \ 2^x > x^2$.

3. La proposition (A) est fausse car sa négation est vraie. En effet :

$$\exists x = -4 \in \mathbb{R}, x = -4 \leq 3 \ \ et \ \ x^2 = 16 > 9.$$

La proposition (C) est fausse car sa négation est vraie. En effet :

$$\exists x \in \mathbb{R}, x = \frac{1}{2} \leq 3 \ \ et \ \ 2^x = \sqrt{2} > x^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

4. La proposition (B) est vraie car la contraposé de (B) est vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2 \Rightarrow x < 2.$$

EXERCICE 2

Soit $E = \{$Anne, Zoé, Karim, Marie Jean$\}$. On définit l'application f de E dans l'ensemble F des entiers de 15 à 25 par, pour tout x dans E $f(x) =$ age de x. Anne, Zoé et Karim ont 18 ans, Marie a 20 ans et Jean 16 ans.

1. Soit A l'ensemble des filles de E et B l'ensemble des garcons.
$f(A) = \{y \in F / \exists x \in A, \ \ f(x) = y\} = \{18, 20\}$, et $f(B) = \{y \in F / \exists x \in B, \ \ f(x) = y\} = \{16, 18\}$.

2. L'image de f est définie par $Imf = \{y \in F / \exists x \in E, \ \ f(x) = y\} = \{16, 18, 20\}$. L'application f n'est pas surjective car $Imf \neq F$. On peut aussi dire que 22 n'a pas d'antécédent par f dans E (aucun des cinq jeunes n'a 22 ans).

3. Par définition on a $f^{-1}(\{18\}) = \{x \in E / f(x) \in \{18\}\} = \{x \in E / f(x) = 18\} = \{$Anne, Zoé, Karim$\}$ et $f^{-1}(\{16\}) = \{x \in E / f(x) \in \{16\}\} = \{x \in E / f(x) = 16\} = \{$Jean$\}$.
L'application f n'est pas injective car $f($Anne$) = f($Zoé$) = 18$ or Anne $\neq$ Zoé.

4. Par définition on a $f^{-1}(\{17\}) = \{x \in E / f(x) \in \{17\}\} = \emptyset$ car aucun jeune n'a 17 ans.

5. Montrons cette implication par contraposé. C'est à dire supposons que f est surjective et montrons que pour tout sous-ensemble non vide C de F, $f^{-1}(C) \neq \emptyset$.

$$f \ \text{ surjective} \Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E \ \ f(x) = y,$$

Soit C un sous-ensemble non vide de $F \Rightarrow \exists z \in C \subset F \Rightarrow \exists x \in E \;\; f(x) = z$ (puisque f est surjective)
$\Rightarrow x \in f^{-1}(C) \Rightarrow f^{-1}(C) \neq \emptyset$.

Exercice 3

Montrons par récurrence que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, pour tout entier $n > 0$.
Pour cela nous allons d'abord initialiser le processus de récurrence.

- Initialisation

  Pour $n = 1$, $1^3 = 1$ et $\dfrac{1^2 2^2}{4} = 1$ donc la relation est vraie pour $n = 1$.
  Montrons maintenant que si la relation est vraie pour n alors elle est vraie pour $n+1$.

- Hérédité

  Supposons donc que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, alors

  $$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}.$$

  Donc

  $$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

  On en déduit que le relation est vraie pour $n+1$.

L'initialisation et l'hérédité nous permetent de conclure que la relation est vraie pour tout n.

Exercice 4

1. Pour intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ (où $a \leq b$), on a $x \in [a, b] \Leftrightarrow |x - \dfrac{a+b}{2}| \leq \dfrac{b-a}{2}$. Donc ici ,

$$x \in [-1, 5] \Leftrightarrow |x - 2| \leq 3.$$

2. Déterminons les intervalles de $\mathbb{R}$ définis par les conditions suivantes sur x.
a) $A = \{x \in \mathbb{R}/ \;\; |x-2| \leqslant 1\} = \{x \in \mathbb{R}/ \;\; -1 \leq x - 2 \leqslant 1\} = \{x \in \mathbb{R}/ \;\; 1 \leq x \leqslant 3\}$,

$$A = [1, 3].$$

b) $B = \{x \in \mathbb{R}/ \;\; |x - |x|| \geqslant 1\}$. Donc le complémentaire de B dans $\mathbb{R}$ est :

$$\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}/ \;\; |x - |x|| < 1\}.$$

$\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}/ \;\; -1 < x - |x| < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^+/ \;\; -1 < 0 < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^-/ \;\; -1 < 2x < 1\} = \mathbb{R}^+ \;\cup\;]-\dfrac{1}{2}, 0]$

$$\bar{B} =]-\frac{1}{2}, +\infty].$$

Donc :

$$B =]-\infty, -\frac{1}{2}].$$

Exercice 5

Soit la fonction $f \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.
1. $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; x^2 + 1 \geq 1 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; x^2 + 1 \neq 0$ et par conséquent f est définie sur tout $\mathbb{R}$.
Par ailleurs $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; x^2 + 1 > 0$ et $(x+1)^2 \geq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; -\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} \leq 0$. Donc f est négative.

2. La fonction f est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ puisque le numérateur et le dénominateur sont des polynômes donc dérivables (et le dénominateur ne s'annule pas). Calculons la dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\frac{(x^2+1)2(x+1) - (x+1)^2 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{(x+1)(2x^2+2-2x^2-2x)}{(x^2+1)^2} = -\frac{(x+1)(2-2x)}{(x^2+1)^2},$$

$$f'(x) = 2\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}.$$

3. La dérivée de f s'annule pour $x=-1$ et $x=1$. La dérivée est négative entre les racines. La fonction f prend la valeur 0 en -1, la valeur -1 en 0 et la valeur -2 en $+1$. La limite de f quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$ est égale à -1. Le tableau de variation de f est donc :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f			0				-1
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-1				-2		

On voit sur le tableau de variation que f prend des valeurs entre -2 et 0 donc :

$$Imf = [-2, 0].$$

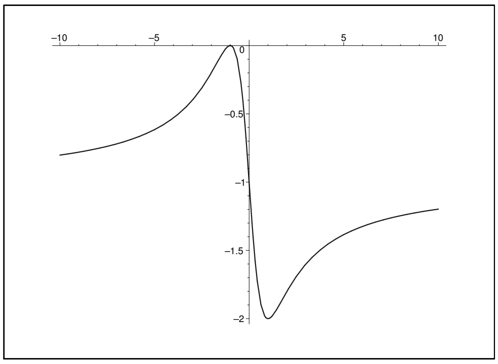

FIGURE 1 – Graphe de la fonction f

4. La fonction f n'est pas injective car $f(-2-\sqrt{3}) = f(-2+\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}$ or $-2-\sqrt{3} \neq -2+\sqrt{3}$.
5. La fonction f n'est pas surjective car on a montré dans la première question qu'elle est négative donc tout y strictement positif n'a pas d'antécédent par f. On peut aussi dire qu'elle n'est pas surjective car $Imf = [-2, 0] \neq \mathbb{R}$.
6. Soit la fonction $g\ :]1, +\infty[\to]-2, -1[$ définie par $g(x) = f(x)$. La fonction g, est bijective car d'après le tableau de variation de f elle est strictement croissante de $[1, +\infty[$ dans $[-2, -1[$.
7. Si $y = g(x)$ alors

$$y = -\frac{(x+1)^2}{x^2+1} \Leftrightarrow y(x^2+1) = -(x+1)^2 = -x^2 - 2x - 1 \Leftrightarrow x^2(1+y) + 2x + (1+y) = 0.$$

En résolvant cette équation du second degré en x on trouve deux racines à savoir :

$$x = \frac{-1-\sqrt{1-(1+y)^2}}{1+y} \quad \text{et} \quad x = \frac{-1+\sqrt{1-(1+y)^2}}{1+y}.$$

Mais la deuxième racine n'appartient pas à $[1, +\infty[$, donc la fonction réciproque de g est :

$$g^{-1}(y) = \frac{-1-\sqrt{1-(1+y)^2}}{1+y}.$$